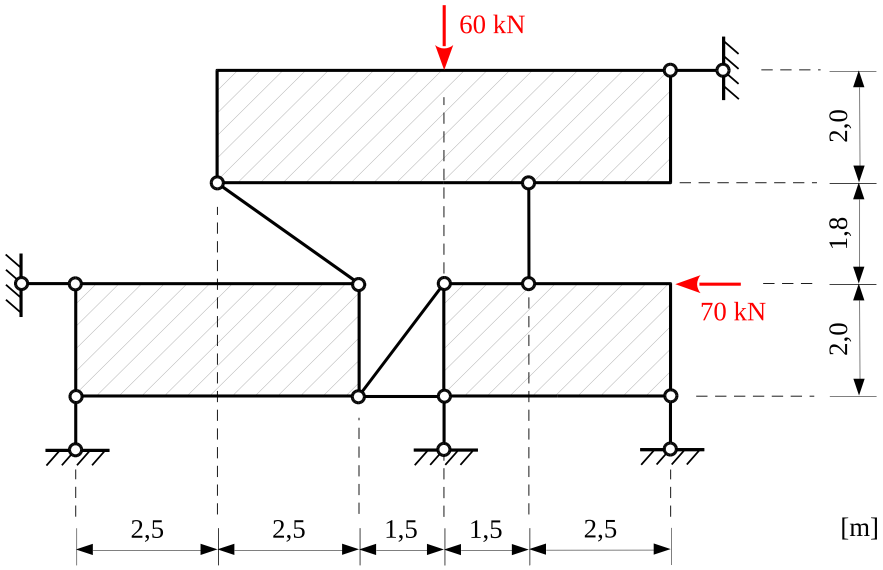
ZADANIE

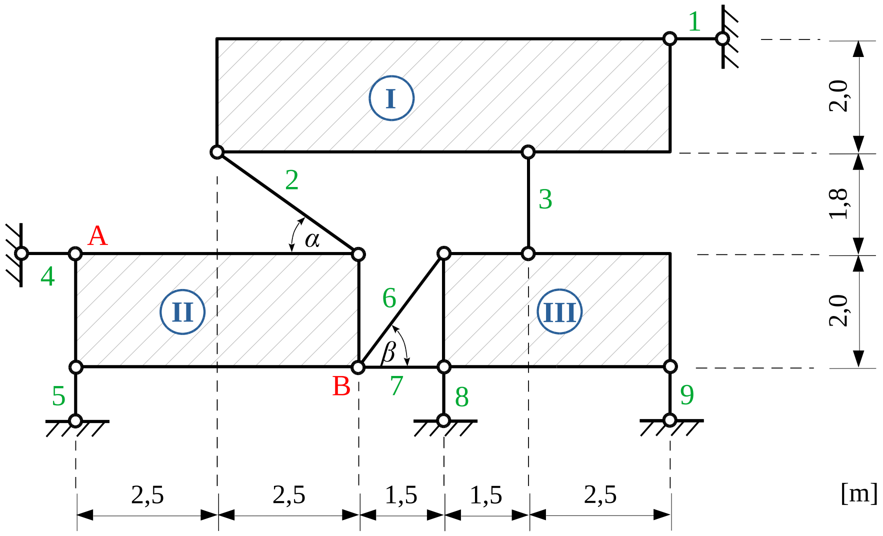
Wyznaczyć reakcje więzów w układzie tarcz sztywnych przedstawionym na Rys.1.



Rys.1. Schemat układu tarcz sztywnych z obciążeniem

ROZWIĄZANIE

I. Analiza geometrycznej niezmienności układu



Rys.2. Schemat układu tarcz sztywnych z oznaczeniami tarcz i więzów

Warunek konieczny geometrycznej niezmienności:

$$n = w - 3 \cdot t,$$

gdzie:

t – liczba tarcz sztywnych w rozpatrywanym układzie,

w – liczba więzów występujących w rozpatrywanym układzie tarcz sztywnych.

W analizowanym przypadku:

$$w = 9,$$

$$t = 3,$$

zatem:

$$n = 9 - 3 \cdot 3 = 0,$$

warunek konieczny jest spełniony.

Warunek dostateczny geometrycznej niezmienności:

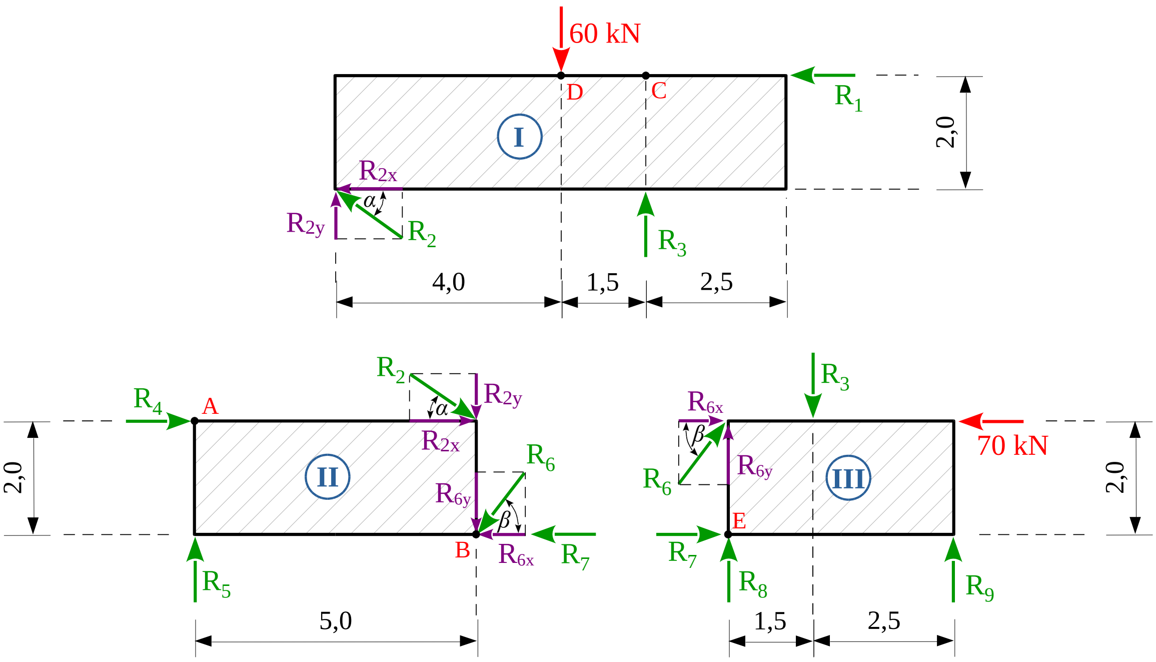
1) Tarcza II i III tworzą układ trójprzegubowy, w którym występują przeguby:
   a) w punkcie A, który jest punktem przecięcia prętów podporowych 4 i 5,
   b) w punkcie B, który jest punktem przecięcia prętów podporowych 6 i 7,
   c) w punkcie przecięcia dwóch równoległych prętów podporowych 8 i 9, czyli w nieskończoności,

   przy czym prosta przechodząca przez punkty A i B nie jest równoległa do prętów tworzących przegub w nieskończoności. Jest to zatem układ geometrycznie niezmienny i może stanowić podłoże zastępcze dla innych tarcz.
2) Tarcza I oparta jest na podłożu oraz podłożu zastępczym prętami 1, 2 i 3, przy czym kierunki tych prętów nie przecinają się w jednym punkcie, jest więc geometrycznie niezmienna.

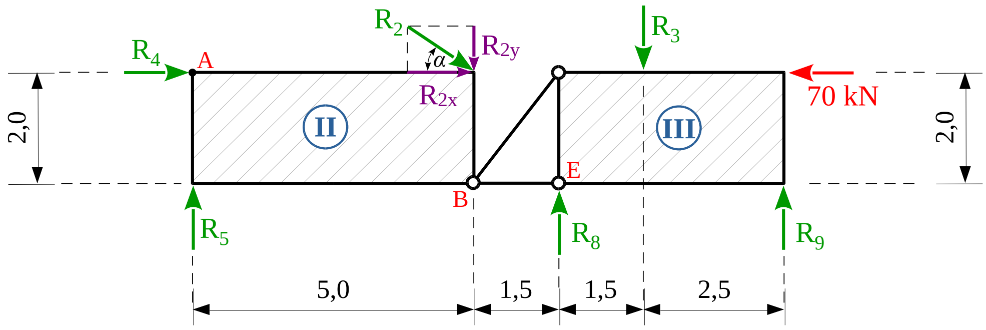
Wniosek: analizowany układ jest układem geometrycznie niezmiennym oraz statycznie wyznaczalnym ($n = 0$).

II. Wyznaczenie reakcji więzów

Układ sił działających na poszczególne tarcze uwolnione od więzów przedstawiono na Rys.3. Do obliczeń wykorzystamy też układ tarcz (II+III), dla którego układ sił przedstawiono na Rys.4.



Rys.3. Poszczególne tarcze uwolnione od więzów



Rys.4. Układ trójprzegubowy uwolniony od więzów

Do obliczeń potrzebne będą funkcje kątów α i β:

$$sin\alpha = 0{,}5843$$
$$cos\alpha = 0{,}8115$$
$$sin\beta = 0{,}8$$
$$cos\beta = 0{,}6$$

Obliczenia wykonujemy w kolejności odwrotnej do kroków wyszczególnionych w analizie warunku dostatecznego geometrycznej niezmienności, czyli najpierw wyznaczamy siły w więzach 1, 2 i 3 z równań równowagi sił dla tarczy I, następnie siły w więzach 4, 5, 6, 7, 8 i 9 układu trójprzegubowego.

1) Tarcza I

$\Sigma M_C^{(\mathrm{I})} = 0$:

$$-60 \cdot 1{,}5 + R_{2y} \cdot 5{,}5 + R_{2x} \cdot 2 = 0$$
$$R_{2x} = R_2 \cdot cos\alpha = R_2 \cdot 0{,}8115$$
$$R_{2y} = R_2 \cdot sin\alpha = R_2 \cdot 0{,}5843$$
$$-60 \cdot 1{,}5 + R_2 \cdot 0{,}5843 \cdot 5{,}5 + R_2 \cdot 0{,}8115 \cdot 2 = 0$$
$$-60 \cdot 1{,}5 + R_2 \cdot 4{,}837 = 0$$
$$R_2 = 18{,}61 \text{ kN}$$
$$R_{2x} = 15{,}10 \text{ kN}$$
$$R_{2y} = 10{,}87 \text{ kN}$$

$\Sigma P_x^{(\mathrm{I})} = 0$:

$$-R_1 - R_{2x} = 0$$
$$-R_1 - 15{,}10 = 0$$
$$R_1 = -15{,}10 \text{ kN}$$

$\Sigma P_y^{(\mathrm{I})} = 0$:

$$-60 + R_{2y} + R_3 = 0$$
$$-60 + 10{,}87 + R_3 = 0$$
$$R_3 = 49{,}13 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$\Sigma M_D^{(\mathrm{I})} = 0$:

$$R_{2y} \cdot 4 + R_{2x} \cdot 2 - R_3 \cdot 1{,}5 = 0$$
$$10{,}87 \cdot 4 + 15{,}10 \cdot 2 - 49{,}13 \cdot 1{,}5 = 0$$
$$43{,}48 + 30{,}20 - 73{,}70 = 0$$

$$-0{,}02 \approx 0$$

Błąd względem maksymalnego składnika sumy:

$$\frac{0{,}02 \cdot 100\%}{73{,}70} = 0{,}027\% < 0{,}1\% \quad => \quad OK$$

2) Układ trójprzegubowy

$\Sigma P_x^{(\mathrm{II+III})} = 0$:

$$R_4 + R_{2x} - 70 = 0$$
$$R_4 = 54{,}90\ \mathrm{kN}$$

$\Sigma M_B^{(\mathrm{II})} = 0$:

$$R_5 \cdot 5 + R_4 \cdot 2 + R_{2x} \cdot 2 = 0$$
$$\mathrm{R}_5 \cdot 5 + 54{,}90 \cdot 2 + 15{,}10 \cdot 2 = 0$$
$$R_5 = -28{,}0\ \mathrm{kN}$$

$\Sigma P_y^{(\mathrm{II})} = 0$:

$$R_5 - R_{2y} - R_{6y} = 0$$
$$R_{6y} = R_6 \cdot sin\beta = R_6 \cdot 0{,}8$$
$$-28{,}0 - 10{,}87 - \mathrm{R}_6 \cdot 0{,}8 = 0$$
$$R_6 = -48{,}59\ \mathrm{kN}$$
$$R_{6x} = R_6 \cdot cos\beta = -48{,}59 \cdot 0{,}6 = -29{,}15\ \mathrm{kN}$$
$$R_{6y} = R_6 \cdot sin\beta = -48{,}59 \cdot 0{,}8 = -38{,}87\ \mathrm{kN}$$

$\Sigma P_x^{(\mathrm{II})} = 0$:

$$R_4 + R_{2x} - R_{6x} - R_7 = 0$$
$$54{,}90 + 15{,}10 - (-29{,}15) - R_7 = 0$$
$$R_7 = 99{,}15\ \mathrm{kN}$$

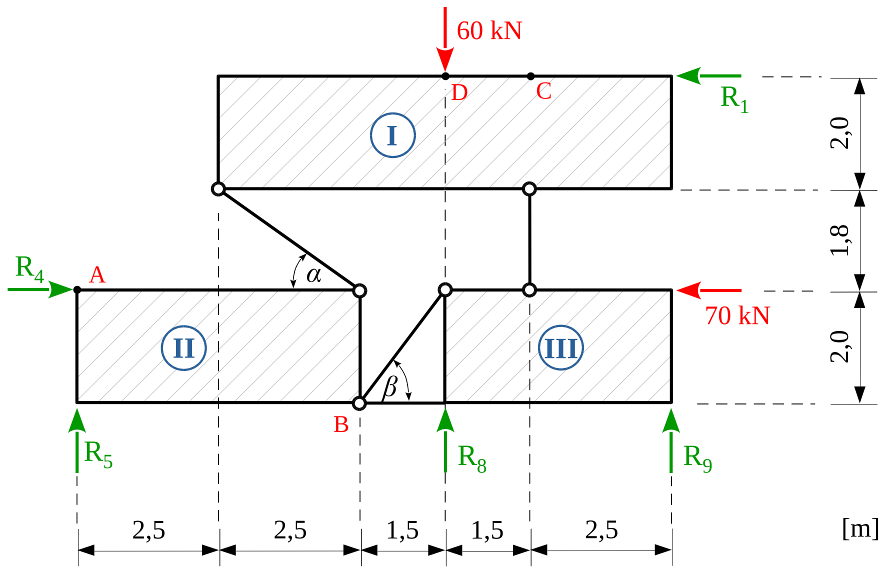
$\Sigma M_E^{(\mathrm{II})} = 0$:

$$R_{6x} \cdot 2 + R_3 \cdot 1{,}5 - 70 \cdot 2 - R_9 \cdot 4 = 0$$
$$-29{,}15 \cdot 2 + 49{,}13 \cdot 1{,}5 - 70 \cdot 2 - R_9 \cdot 4 = 0$$
$$R_9 = -31{,}15\ \mathrm{kN}$$

$\Sigma P_y^{(\mathrm{III})} = 0$:

$$R_{6y} - R_3 + R_8 + R_9 = 0$$
$$-38{,}87 - 49{,}13 + R_8 + (-31{,}15) = 0$$
$$R_8 = 119{,}2\ \mathrm{kN}$$

Do sprawdzenia obliczeń wykorzystamy równanie równowagi sił działających na cały układ tarcz (I+II+III) – Rys.5.



Rys.5. Układ sił dla tarcz (I+II+III) do sprawdzenia obliczeń

$$\Sigma M_B^{(\mathrm{I+II+III})} = 0:$$

$$R_4 \cdot 2 + R_5 \cdot 5 - R_8 \cdot 1{,}5 - R_9 \cdot 5{,}5 - 70 \cdot 2 - R_1 \cdot 5{,}8 + 60 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$54{,}90 \cdot 2 + (-28) \cdot 5 - 119{,}2 \cdot 1{,}5 - (-31{,}15) \cdot 5{,}5 - 70 \cdot 2 - (-15{,}10) \cdot 5{,}8 + 60 \cdot 1{,}5 = 0$$

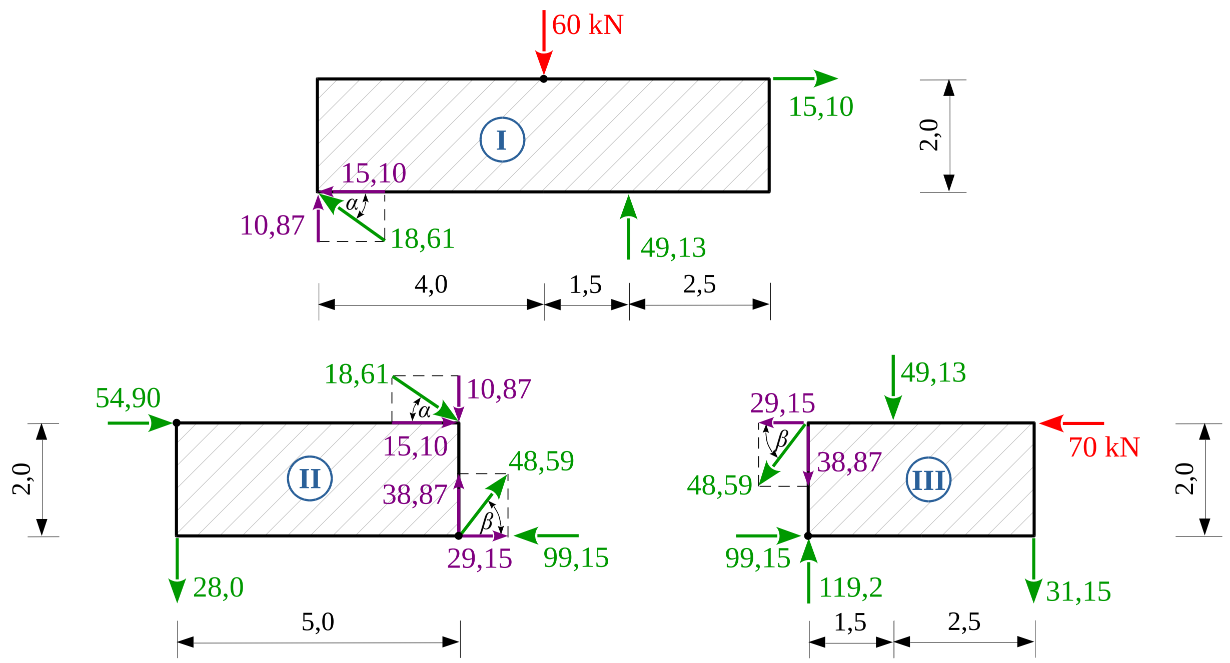
$$109{,}8 - 140 - 178{,}8 + 171{,}3 - 140 + 87{,}58 + 90 = 0$$

$$-0{,}12 \approx 0$$

Błąd względem maksymalnego składnika sumy:

$$\frac{0{,}12 \cdot 100\%}{178{,}8} = 0{,}067\% < 0{,}1\% \quad => \quad OK$$

III. Zestawienie sił czynnych i biernych działających na poszczególne tarcze



Rys.6. Zestawienie sił działających na tarcze