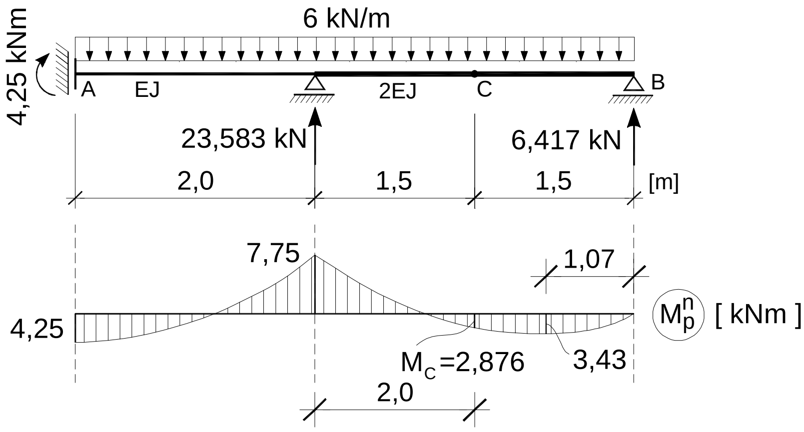
Dany jest wykres momentów zginających w belce przedstawionej na rysunku. Wyznaczyć:

a) obrót przekroju B,
b) przemieszczenie pionowe przekroju C.

W obliczeniach pominąć wpływ sił normalnych i poprzecznych.



Rozwiązanie:

Przemieszczenia wyznaczamy za pomocą równania pracy wirtualnej. Stosujemy twierdzenie redukcyjne:

$$\bar{1}\cdot\delta = \sum\int_x \bar{M}^n \cdot \frac{M_P^n}{EJ}dx = \sum\int_x \bar{M}^0 \cdot \frac{M_P^n}{EJ}dx$$

gdzie: δ - szukane przemieszczenie (liniowe lub kątowe),

$\bar{1}$ - obciążenie wirtualne adekwatne do szukanego przemieszczenia,

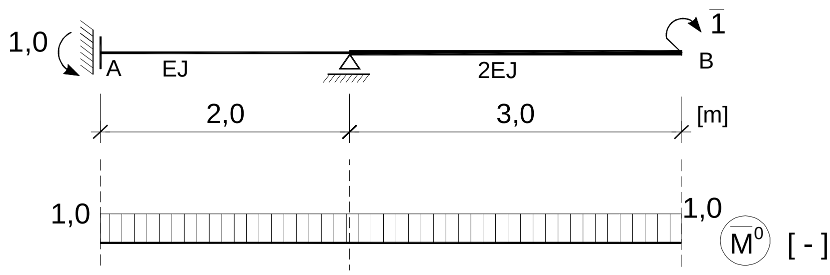
$\bar{M}^n$ - momenty zginające wywołane odpowiednim obciążeniem wirtualnym w układzie statycznie niewyznaczalnym,

$\bar{M}^0$ - momenty zginające wywołane odpowiednim obciążeniem wirtualnym w układzie statycznie wyznaczalnym (spełniającym wymagania układu podstawowego metody sił),

M_p^n - momenty zginające wywołane zadanym obciążeniem zewnętrznym w układzie statycznie niewyznaczalnym (w tym przypadku dane :),

EJ - sztywność na zginanie.

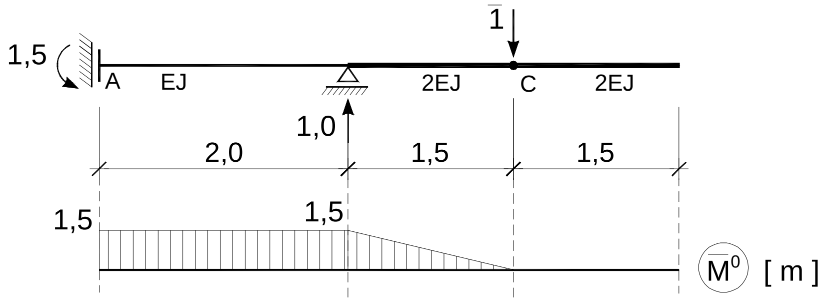
a) obrót przekroju B:



$$\varphi_A = \sum\int_x \bar{M}^0 \cdot \frac{M_P^n}{EJ}dx =$$

$$+\frac{1}{EJ}\cdot\left[2\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot(7{,}75-4{,}25) - \frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot2^2}{8}\cdot2\cdot1\right] + \frac{1}{2EJ}\cdot\left[3\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot7{,}75 - \frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot3^2}{8}\cdot3\cdot1\right] = -\frac{1{,}438}{EJ}$$

b) przemieszczenie pionowe przekroju C:



Potrzebna do obliczeń wartość momentu zginającego wywołanego obciążeniem zewnętrznym w punkcie C:

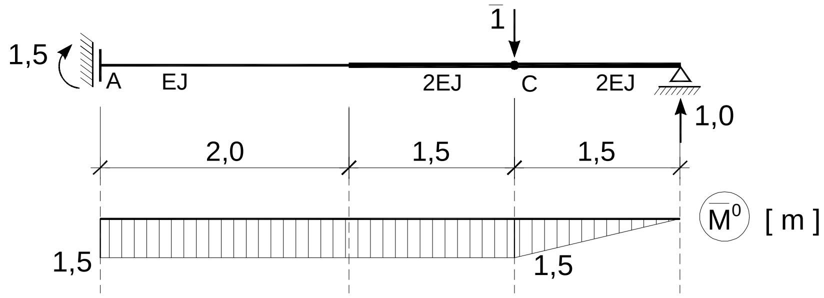
$M_C = 6,417\cdot 1,5 - 6\cdot 1,5\cdot 0,75 = 2,876\ kNm$

$$v_C = \sum \int_x \bar{M}^0 \cdot \frac{M_P^n}{EJ}\,dx =$$

$$= \frac{1}{EJ}\cdot\left[2\cdot 1,5\cdot\frac{1}{2}\cdot(7,75-4,25) - \frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot 2^2}{8}\cdot 2\cdot 1,5\right] +$$

$$+\frac{1}{2EJ}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 1,5\cdot 1,5\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 7,75 - \frac{1}{3}\cdot 2,876\right) - \frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot(1,5)^2}{8}\cdot 1,5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1,5\right] = \frac{0,984}{EJ}$$

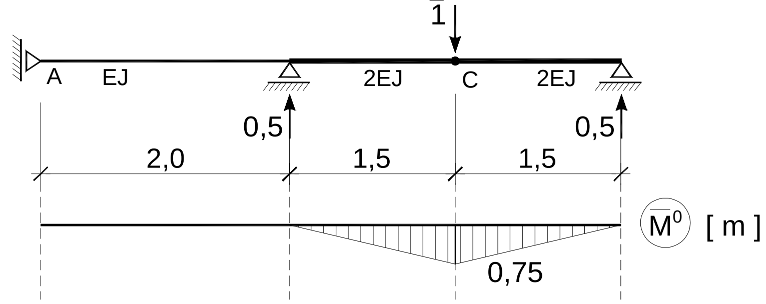
Przyjęcie innego schematu belki do wyznaczenia wykresu $\bar{M}^0$ prowadzi do nieco dłuższych obliczeń:



$$v_C = \frac{1}{EJ}\cdot\left[2\cdot 1,5\cdot\frac{1}{2}\cdot(7,75-4,25) - \frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot 2^2}{8}\cdot 2\cdot 1,5\right] +$$

$$+\frac{1}{2EJ}\cdot\left[1,5\cdot 1,5\cdot\frac{1}{2}\cdot(2,876-7,75) + \frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot(1,5)^2}{8}\cdot 1,5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1,5 + \frac{1}{2}\cdot 1,5\cdot 1,5\cdot\frac{2}{3}\cdot 2,876 + \frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot(1,5)^2}{8}\cdot 1,5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1,5\right] = \frac{0,985}{EJ}$$

...lub krótszych:



$$v_C = \frac{1}{2EJ}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 1,5\cdot 0,75\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2,876 - \frac{1}{3}\cdot 7,75\right) + \frac{1}{2}\cdot 1,5\cdot 0,75\cdot\frac{2}{3}\cdot 2,876 + \frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot(1,5)^2}{8}\cdot 1,5\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,75\cdot 2\right] = \frac{0,985}{EJ}$$

...ale do tego samego wyniku :)