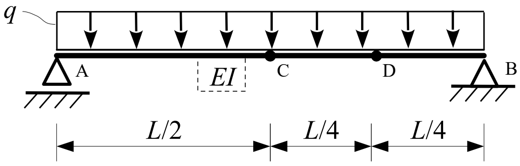
ZADANIE

Obliczyć przemieszczenie pionowe (ugięcie) w punkcie C oraz kąt obrotu przekroju w punkcie D belki, której schemat statyczny i obciążenie przedstawiono na Rys.1. Zastosować **równanie prac wirtualnych** (całkowanie wykonać analitycznie i metodą Mohra-Wereszczagina) oraz **równanie różniczkowe linii ugięcia**.



Rys.1. Schemat konstrukcji

ROZWIĄZANIE

1. Przemieszczenie pionowe w punkcie C

1.1. Równanie prac wirtualnych

Równanie prac wirtualnych służące do wyznaczenia dowolnego przemieszczenia punktu *k* w prętowych układach zginanych (**wzór Maxwella-Mohra**), po pominięciu wpływu sił poprzecznych i normalnych ma postać:

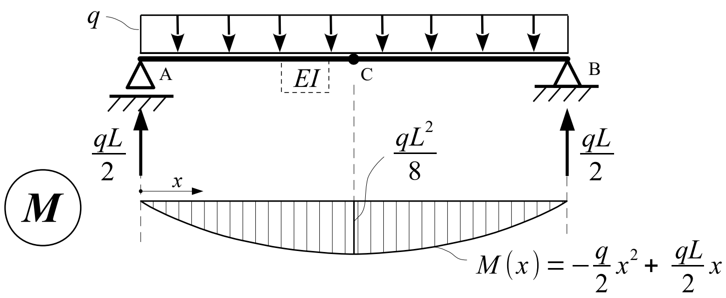
$$\sum \bar{P}\cdot\delta_k = \sum_i \int_{L_i} \frac{\bar{M}(x)\,M(x)}{EI}dx\,, \tag{1}$$

gdzie: δ_k – szukane przemieszczenie (liniowe lub kątowe) punktu *k*, wywołane zadanym obciążeniem,
$\overline{P}$ – obciążenie wirtualne – uogólniona siła (siła lub moment skupiony) przyłożona w punkcie, w którym szukamy przemieszczenia (czyli w punkcie *k*), o kierunku zgodnym z kierunkiem szukanego przemieszczenia,
$M(x)$ – momenty zginające wywołane zadanym obciążeniem,
$\overline{M}(x)$ – momenty zginające wywołane obciążeniem wirtualnym $\overline{P}$,
i – ilość przedziałów całkowania,
L_i – długość przedziału całkowania,
I – moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta,
E – moduł Younga materiału pręta.

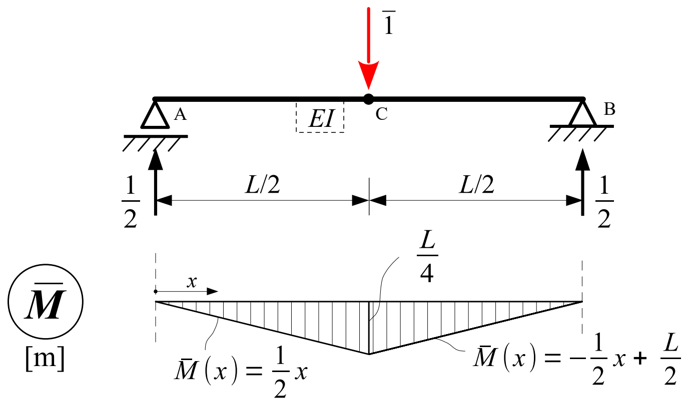
Całkę z iloczynu dwóch funkcji występującą w równaniu (1) obliczymy dwiema metodami: **analitycznie** oraz **metodą Mohra-Wereszczagina**.

Reakcje więzów oraz wykres momentów zginających $M(x)$ wywołane zadanym obciążeniem przedstawione zostały na Rys.2.

Szukamy przemieszczenia pionowego punktu C – odpowiednim obciążeniem wirtualnym w tym przypadku jest pionowa siła (przyjmujemy $\overline{P}$ = 1) przyłożona w punkcie C. Reakcje więzów oraz wykres momentów zginających $\overline{M}(x)$ wywołany tym obciążeniem przedstawione zostały na Rys.3.



Rys.2. Reakcje więzów oraz wykres momentów zginających wywołane zadanym obciążeniem



Rys.3. Obciążenie wirtualne, reakcje więzów oraz wykres momentów zginających wywołane tym obciążeniem

Całkowanie analityczne:

$$v_C = \sum_i \int_{L_i} \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2}x\cdot\left(-\frac{q}{2}x^2 + \frac{qL}{2}x\right)dx +$$

$$+\frac{1}{EI}\int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{q}{2}x^2+\frac{qL}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}}\left(-\frac{q}{4}x^3+\frac{qL}{4}x^2\right)dx + \frac{1}{EI}\int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(\frac{q}{4}x^3-\frac{qL}{2}x^2+\frac{qL^2}{4}x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{q}{16}x^4+\frac{qL}{12}x^3\right]_0^{\frac{L}{2}} + \frac{1}{EI}\left[\frac{q}{16}x^4-\frac{qL}{6}x^3+\frac{qL^2}{8}x^2\right]_{\frac{L}{2}}^{L} =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{q}{16}\left(\frac{L}{2}\right)^4+\frac{qL}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3+\frac{q}{16}L^4-\frac{qL}{6}L^3+\frac{qL^2}{8}L^2-\frac{q}{16}\left(\frac{L}{2}\right)^4+\frac{qL}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3-\frac{qL^2}{8}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}.$$

Całkowanie metodą Mohra-Wereszczagina:

$$v_C = \sum_i \int_{L_i} \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI}dx = \frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{qL^2}{8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{q\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2}{8}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{4}\right]\cdot 2 = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}.$$

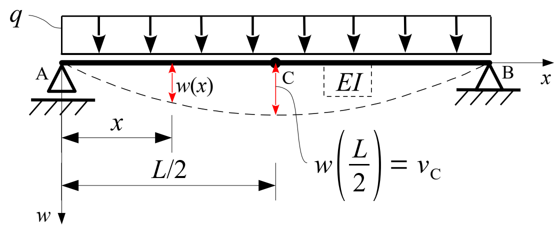
1.2. Różniczkowe równanie linii ugięcia

Różniczkowe równanie linii ugięcia osi belki zginanej poprzecznie określone jest zależnością:

$$EI \cdot w''(x) = -M(x), \tag{2}$$

gdzie: $w(x)$ – funkcja opisująca linię ugięcia osi belki,

$M(x)$ – funkcja momentów zginających wywołana zadanym obciążeniem.



Rys.4. Linia ugięcia osi belki

W rozpatrywanym przypadku:

$$M(x) = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{qL}{2}x, \tag{3}$$

stąd równanie różniczkowe linii ugięcia ma postać:

$$EI \cdot w''(x) = \frac{q}{2}x^2 - \frac{qL}{2}x. \tag{4}$$

Po scałkowaniu równania (4) otrzymujemy:

$$EI \cdot w'(x) = \frac{q}{6}x^3 - \frac{qL}{4}x^2 + C, \tag{5}$$

przy czym $w'(x)$ jest funkcją kątów obrotów przekrojów belki. Całkujemy ponownie i otrzymujemy równanie linii ugięcia belki:

$$EI \cdot w(x) = \frac{q}{24}x^4 - \frac{qL}{12}x^3 + Cx + D. \tag{6}$$

Stałe całkowania C i D wyznaczymy z warunków brzegowych. Dla rozpatrywanego schematu podparcia belki warunki brzegowe są następujące:

$$w(0) = 0, \tag{7}$$

$$w(L) = 0. \tag{8}$$

Z pierwszego warunku brzegowego otrzymujemy:

$$D = 0, \tag{9}$$

z drugiego:

$$EI \cdot 0 = \frac{q}{24}L^4 - \frac{qL}{12}L^3 + CL + 0,$$

a zatem:

$$C = \frac{qL^3}{24}. \tag{10}$$

Po podstawieniu stałych całkowania otrzymujemy:

$$EI \cdot w(x) = \frac{q}{24}x^4 - \frac{qL}{12}x^3 + \frac{qL^3}{24}x, \tag{11}$$

a więc linia ugięcia belki ostatecznie opisana jest równaniem:

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{q}{24}x^4 - \frac{qL}{12}x^3 + \frac{qL^3}{24}x\right). \tag{12}$$

Ugięcie belki w punkcie C, czyli w połowie rozpiętości $\left(x = \frac{L}{2}\right)$ wynosi:

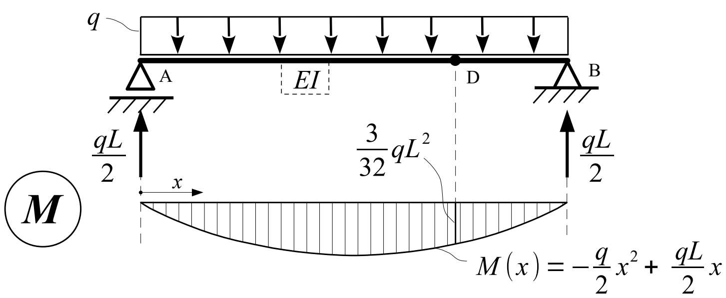
$$v_C = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{EI}\left[\frac{q}{24}\left(\frac{L}{2}\right)^4 - \frac{qL}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{qL^3}{24}\frac{L}{2}\right] = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}.$$

Przemieszczenie pionowe punktu C jest oczywiście w tym przypadku maksymalnym ugięciem belki, czyli tzw. strzałką ugięcia belki.

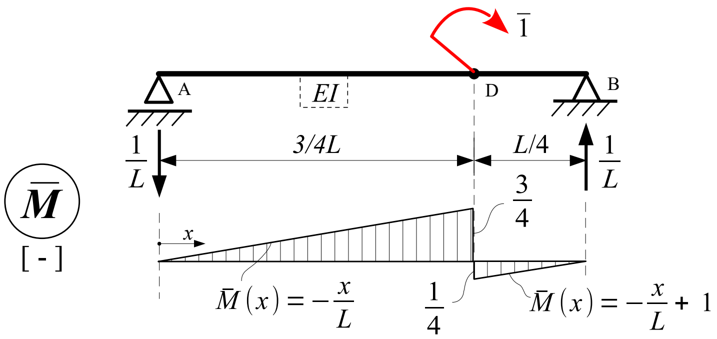
2. Obrót przekroju w punkcie D

2.1. Równanie prac wirtualnych

Odpowiednim obciążeniem wirtualnym w tym przypadku jest moment skupiony przyłożony w punkcie D (przyjmujemy $\bar{M} = 1$). Reakcje więzów oraz wykres momentów zginających wywołane tym obciążeniem przedstawione zostały na Rys.6.



Rys.5. Reakcje więzów oraz wykres momentów zginających wywołane zadanym obciążeniem



Rys.6. Obciążenie wirtualne, reakcje więzów oraz wykres momentów zginających wywołane obciążeniem wirtualnym

Całkowanie analityczne:

$$\varphi_D = \sum_i \int_{L_i} \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI}dx =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{3}{4}L}\left(-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{q}{2}x^2+\frac{qL}{2}x\right)dx+\frac{1}{EI}\int_{\frac{3}{4}L}^{L}\left(-\frac{x}{L}+1\right)\left(-\frac{q}{2}x^2+\frac{qL}{2}x\right)dx=$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{3}{4}L}\left(-\frac{q}{2L}x^3-\frac{q}{2}x^2\right)dx+\frac{1}{EI}\int_{\frac{3}{4}L}^{L}\left(\frac{q}{2L}x^3-q\,x^2+\frac{qL}{2}x\right)dx=$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{q}{8L}x^4-\frac{q}{6}x^3\right]_0^{\frac{3}{4}L}+\frac{1}{EI}\left[\frac{q}{8L}x^4-\frac{q}{3}x^3+\frac{qL}{4}x^2\right]_{\frac{3}{4}L}^{L}=$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{q}{8L}\left(\frac{3}{4}L\right)^4-\frac{q}{6}\left(\frac{3}{4}L\right)^3+\frac{q}{8L}L^4-\frac{q}{3}L^3+\frac{qL}{4}L^2-\frac{q}{8L}\left(\frac{3}{4}L\right)^4+\frac{q}{3}\left(\frac{3}{4}L\right)^3-\frac{qL}{4}\left(\frac{3}{4}L\right)^2\right]=$$

$$= -0{,}02865\,\frac{qL^3}{EI}.$$

Całkowanie metodą Mohra-Wereszczagina:

$$\varphi_{\mathrm{D}} = \sum_i\int_{L_i}\frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI}dx=$$

$$= \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}L\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{32}qL^2-\frac{2}{3}\cdot\frac{q\cdot\left(\frac{3}{4}L\right)^2}{8}\cdot\frac{3}{4}L\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right]+$$

$$+\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{L}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{32}qL^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{q\cdot\left(\frac{L}{4}\right)^2}{8}\cdot\frac{L}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right]=-0{,}02865\frac{qL^3}{EI}.$$

2.2. Różniczkowe równanie linii ugięcia

Wykorzystamy wyznaczoną wcześniej funkcję kątów obrotu przekrojów belki (5), która po podstawieniu stałej całkowania C (10) wygląda tak:

$$w'(x)=\frac{1}{EI}\cdot\left(\frac{q}{6}x^3-\frac{qL}{4}x^2+\frac{qL^3}{24}\right).$$

Obrót przekroju w punkcie D $\left(x=\frac{3}{4}L\right)$ wynosi:

$$\varphi_{\mathrm{D}}=w'\left(\frac{3}{4}L\right)=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{q}{6}\left(\frac{3}{4}L\right)^3-\frac{qL}{4}\left(\frac{3}{4}L\right)^2+\frac{qL^3}{24}\right]=-0{,}02865\frac{qL^3}{EI}.$$