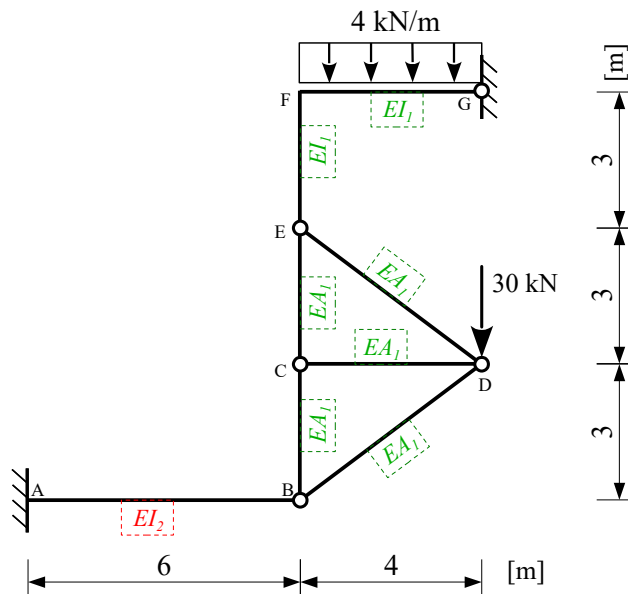


ZADANIE

Obliczyć przemieszczenie całkowite węzła D oraz przemieszczenie pionowe węzła B układu, którego schemat statyczny i obciążenie przedstawiono na Rys.1. Zastosować **metodę prac wirtualnych**, w obliczeniach **uwzględnić wpływ momentów zginających, sił poprzecznych i normalnych**. Przyjąć wstępnie przekroje prętów z profili dwuteowych (IN, IPE, HEB, HEA), tak aby pod działaniem zadanego obciążenia powstałe w prętach naprężenia normalne spełniały warunek $\sigma \leq 200\text{MPa}$.



Rys.1. Schemat konstrukcji

ROZWIĄZANIE**1. Wstęp**

Zanim zaczniemy stosowne obliczenia przyjrzyjmy się konstrukcji. Przedstawiony na Rys.1 układ składa się z belki AB, rami EFG oraz kratownicy BDE. Jest to więc układ mieszany, złożony z prętów zginanych (belka i rama) oraz prętów pracujących osiowo (kratownica). Analiza geometrycznej niezmienności i statycznej wyznaczalności:

1) Warunek konieczny geometrycznej niezmienności:

$$n \geq 0,$$

gdzie:

$$n = w - 3 \cdot t,$$

przy czym: w – liczba więzów,

t – liczba tarcz sztywnych w układzie.

W rozpatrywanym przykładzie kratownica BDE jest kratownicą o strukturze prostej, można ją więc zastąpić jedną tarczą zastępczą, oprócz tego występują tarcze AB i EFG (Rys.2), stąd:

$$t = 3.$$

Liczba więzów (trzy przeguby: B, E, G i utwierdzenie w punkcie A):

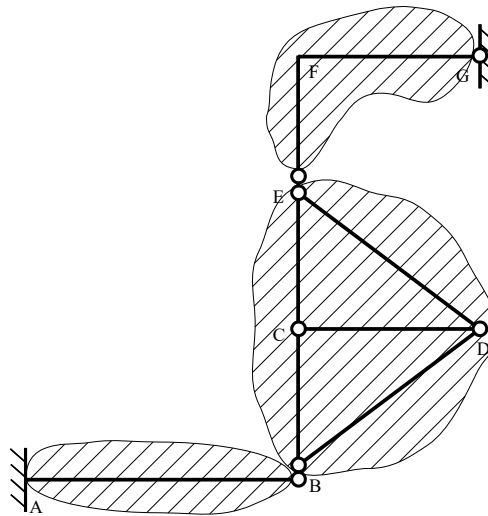
$$w = 3 \cdot 2 + 3 = 9,$$

zatem:

$$n = 9 - 3 \cdot 3 = 0,$$

warunek konieczny geometrycznej niezmienności jest spełniony, liczba więzów w układzie może zapewnić konstrukcji geometryczną niezmiennosc (ale nie musi).

- 2) Warunek dostateczny geometrycznej niezmienności, czyli analiza rozmieszczenia więzów. Tarcza AB jest utwierdzona w punkcie A, jest więc geometrycznie niezmienna i może stanowić podłoże zastępcze. Tarcze BDE i EFG tworzą układ trójprzegubowy, oparty z jednej strony na geometrycznie niezmiennym tarczy AB, z drugiej na podłożu; przeguby B, E i G nie leżą na jednej prostej. Warunek dostateczny jest spełniony, rozmieszczenie więzów zapewnia układowi geometryczną niezmiennosc.
- 3) Określenie statycznej wyznaczalności: układ jest statycznie wyznaczalny, jeśli $n = 0$ (czyli $w = 3 \cdot t$), statycznie niewyznaczalny, jeśli $n > 0$ (czyli $w > 3 \cdot t$). U nas $n = 0$, zatem układ jest statycznie wyznaczalny.



Rys.2. Schemat konstrukcji – układ tarcz sztywnych

Układ obciążony jest siłami zewnętrznymi – w takim przypadku **równanie prac wirtualnych** służące do wyznaczenia dowolnego przemieszczenia punktu k ma postać:

$$\sum P \cdot \delta_k = \sum \int_x \frac{\bar{M} M}{EI} dx + \sum \int_x \frac{\bar{T} T}{GA} \cdot \kappa dx + \sum \int_x \frac{\bar{N} N}{EA} dx, \quad (1)$$

gdzie: δ_k – szukane przemieszczenie punktu k , wywołane zadaniem obciążeniem,

\bar{P} – obciążenie wirtualne – uogólniona siła (siła lub moment skupiony) przyłożona w punkcie, w którym szukamy przemieszczenia (czyli w punkcie k), o kierunku zgodnym z kierunkiem szukanego przemieszczenia,

M, T, N – siły wewnętrzne wywołane zadaniem obciążeniem,

$\bar{M}, \bar{T}, \bar{N}$ – siły wewnętrzne wywołane obciążeniem wirtualnym \bar{P} ,

I, A – moment bezwładności oraz pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta,

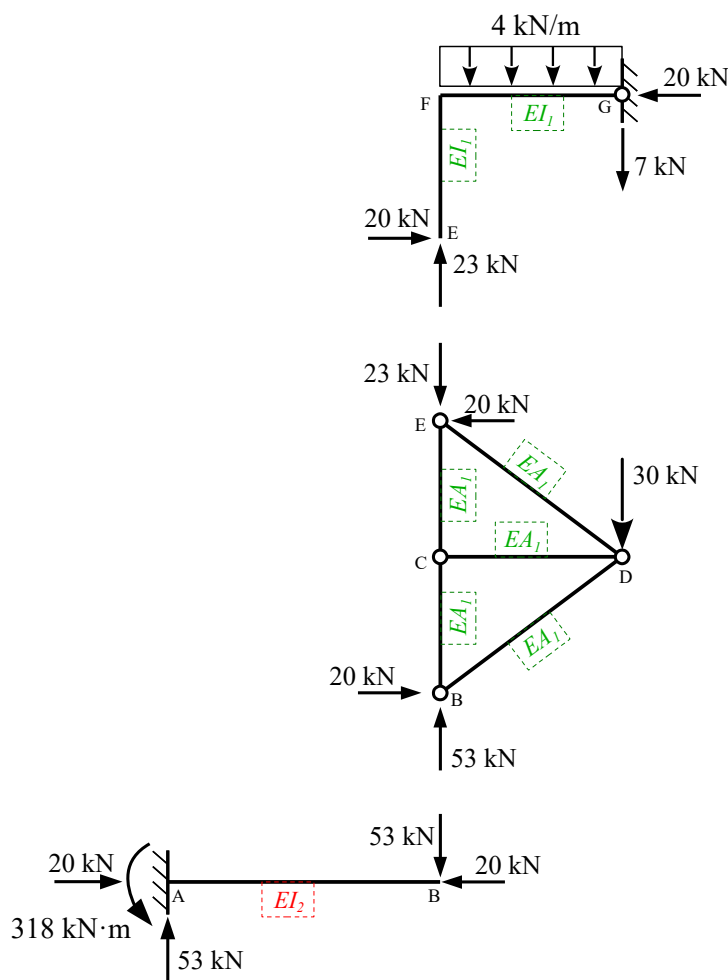
E – moduł Younga materiału pręta,

G – moduł Kirchhoffa materiału pręta,

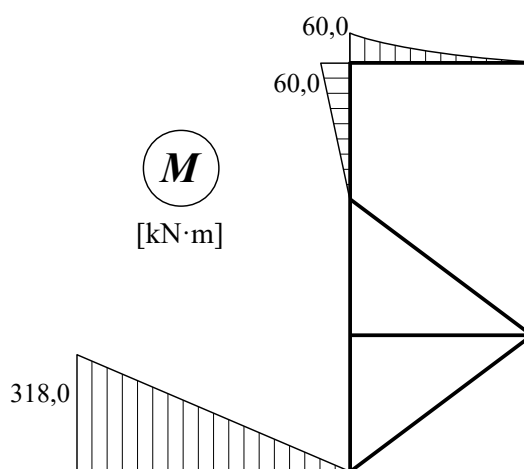
κ – współczynnik ścinania, zależny od kształtu przekroju poprzecznego pręta.

Do obliczenia całek występujących w równaniu (1) zastosujemy metodę Mohra-Wereszczagina.

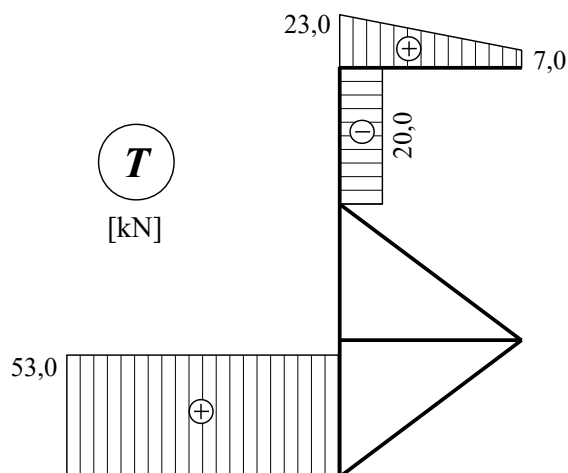
2. Reakcje więzów oraz wykresy sił wewnętrznych wywołane zadaniem obciążeniem



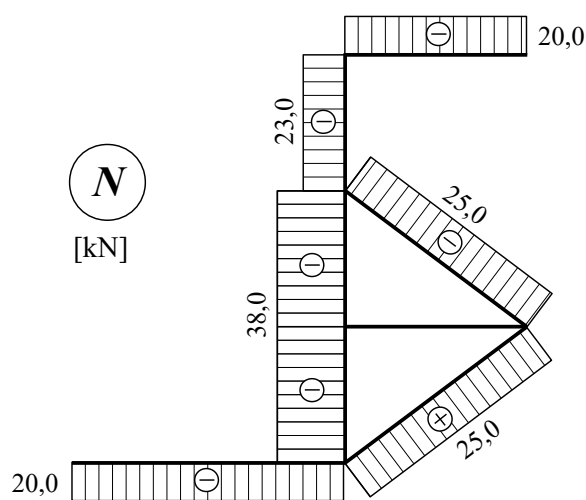
Rys.3. Reakcje więzów wywołane zadaniem obciążeniem



Rys.4. Wykres momentów zginających wywołanych zadaniem obciążeniem



Rys.5. Wykres sił poprzecznych wywołanych zadaniem obciążeniem



Rys.6. Wykres sił normalnych wywołanych zadaniem obciążeniem

3. Projektowanie przekrojów

3.1. Pręty zginane

Naprężenia normalne w prętach ramy:

$$\sigma = \frac{|M|}{w},$$

powinny spełniać warunek:

$$\sigma \leq \sigma_{\text{dop}},$$

przy czym:

$$\sigma_{\text{dop}} = 200 \text{ MPa} = 20 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Potrzebny wskaźnik wytrzymałości przekroju:

$$W_{\text{potrz}} \geq \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{dop}}}.$$

Maksymalny moment zginający dla pierwszej grupy prętów:

$$M_{\max} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m} = 6000 \text{ kN} \cdot \text{cm},$$

stąd:

$$w_{\text{potrz}} \geq \frac{6000}{20},$$

$$w_{\text{potrz}} \geq 300 \text{ cm}^3.$$

Przyjęto I 240 o wskaźniku wytrzymałości $w = 354 \text{ cm}^3$. Pozostałe dane przekroju:

$$g_1 = 8,7 \text{ mm},$$

$$t_1 = 13,1 \text{ mm},$$

$$h_1 = 240 \text{ mm},$$

$$I_1 = 4250 \text{ cm}^4,$$

$$A_1 = 46,1 \text{ cm}^2.$$

Maksymalny moment zginający dla drugiej grupy prętów:

$$M_{\max} = 318 \text{ kN} \cdot \text{m} = 31800 \text{ kN} \cdot \text{cm},$$

stąd:

$$w_{\text{potrz}} \geq \frac{31800}{20},$$

$$w_{\text{potrz}} \geq 1590 \text{ cm}^3.$$

Przyjęto I 450 o wskaźniku wytrzymałości $w = 2040 \text{ cm}^3$. Pozostałe dane przekroju:

$$g_2 = 16,2 \text{ mm},$$

$$t_2 = 24,3 \text{ mm},$$

$$h_2 = 450 \text{ mm},$$

$$I_2 = 45850 \text{ cm}^4,$$

$$A_2 = 147 \text{ cm}^2.$$

3.2. Pręty kratownicy

Przyjęto przekrój I 240.

3.3. Wartości parametrów EI , EA , GA oraz κ

Obliczmy występujące w równaniu (1) wyrażenia określające: sztywność zginania EI , sztywność osiową EA , sztywność ścinania GA oraz współczynnik κ dla poszczególnych grup prętów konstrukcji. Przyjmujemy moduł Younga $E = 205 \text{ GPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$, moduł Kirchhoffa:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{205}{2(1+0,3)} = 78,85 \text{ GPa}.$$

Wobec tego:

$$EI_1 = 205 \cdot 10^6 \cdot 4250 \cdot 10^{-8} = 8712,5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2,$$

$$EI_2 = 205 \cdot 10^6 \cdot 45850 \cdot 10^{-8} = 93992,5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2,$$

$$GA_1 = 78,85 \cdot 10^6 \cdot 46,1 \cdot 10^{-4} = 363498,5 \text{ kN},$$

$$GA_2 = 78,85 \cdot 10^6 \cdot 147 \cdot 10^{-4} = 1\,159\,095 \text{ kN},$$

$$EA_1 = 205 \cdot 10^6 \cdot 46,1 \cdot 10^{-4} = 945\,050 \text{ kN},$$

$$EA_2 = 205 \cdot 10^6 \cdot 147 \cdot 10^{-4} = 3\,013\,500 \text{ kN},$$

$$\kappa_1 = \frac{A_1}{A_{1sr}} = \frac{46,1}{(24 - 2 \cdot 1,31) \cdot 0,87} = 2,478,$$

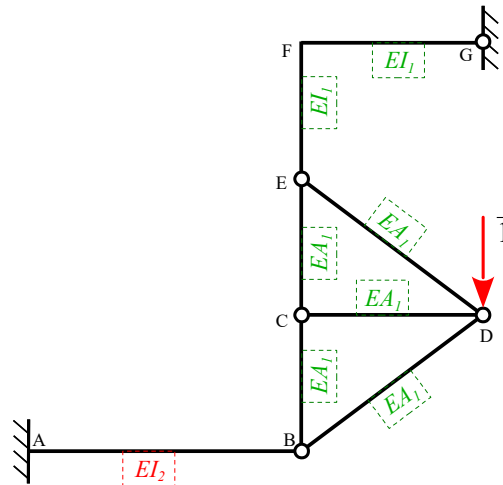
$$\kappa_2 = \frac{A_2}{A_{2sr}} = \frac{147}{(45 - 2 \cdot 2,43) \cdot 1,62} = 2,261.$$

4. Przemieszczenie całkowite węzła D

Ponieważ nie znamy kierunku wektora przemieszczenia węzła D, obliczymy jego składowe (pionową v_D i poziomą h_D), a szukane przemieszczenie – jako sumę wektorową tych składowych.

4.1. Składowa pionowa

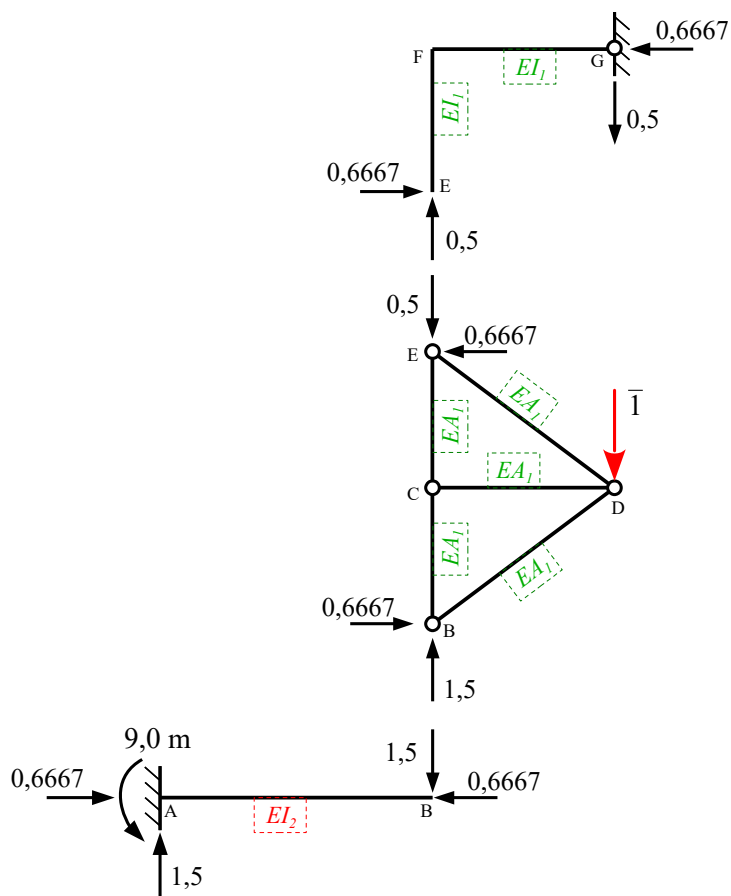
Odpowiednim obciążeniem wirtualnym w tym przypadku jest pionowa siła (przyjmujemy $\bar{P} = 1$) przyłożona w punkcie D (Rys.7). Reakcje więzów wywołane tym obciążeniem przedstawione zostały na Rys.8, siły wewnętrzne – na Rys.9, Rys.10 oraz Rys.11.



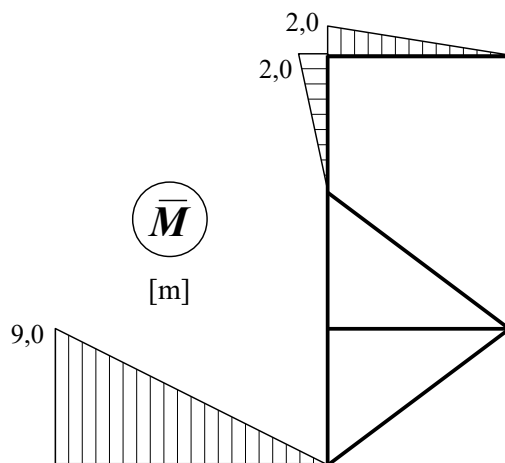
Rys.7. Obciążenie wirtualne

Pierwszy składnik prawej strony równania (1) (wpływ momentów zginających na przemieszczenie):

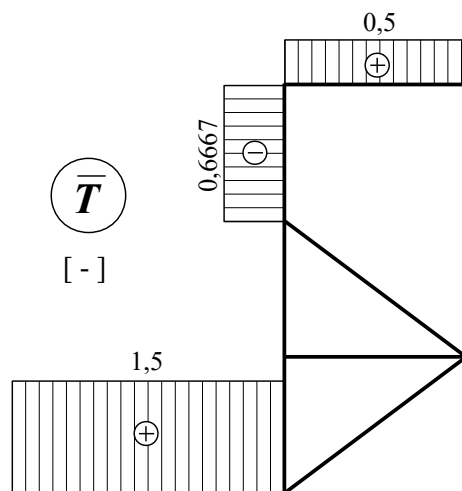
$$\begin{aligned} v_D^{(M)} &= \sum \int_x \frac{\bar{M} M}{EI} dx = \\ &= \frac{1}{EI_1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 \right] + \frac{1}{EI_2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 318 \right] = \\ &= \frac{258,7}{EI_1} + \frac{5724}{EI_2} = \frac{258,7}{8\,712,5} + \frac{5724}{93\,992,5} = 0,02969 + 0,06090 = 0,09059 \text{ m}. \end{aligned}$$



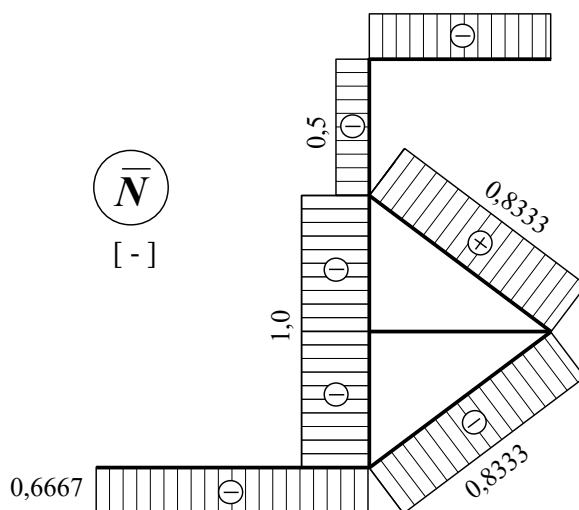
Rys.8. Reakcje więzów wywołane obciążeniem wirtualnym



Rys.9. Wykres momentów zginających wywołanych obciążeniem wirtualnym



Rys.10. Wykres sił poprzecznych wywołanych obciążeniem wirtualnym



Rys.11. Wykres sił normalnych wywołanych obciążeniem wirtualnym

Drugi składnik prawej strony równania (1) (wpływ sił poprzecznych):

$$\begin{aligned}
 v_D^{(T)} &= \sum \int_x \frac{\bar{T} T}{GA} \cdot \kappa \, dx = \\
 &= \frac{\kappa_1}{GA_1} \cdot \left[0,5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (23 + 7) + (-0,6667) \cdot 3 \cdot (-20) \right] + \frac{\kappa_2}{GA_2} \cdot [1,5 \cdot 6 \cdot 53] = \\
 &= \frac{70}{GA_1} \cdot \kappa_1 + \frac{477}{GA_2} \cdot \kappa_2 = \frac{70}{363\,498,5} \cdot 2,478 + \frac{477}{1\,159\,095} \cdot 2,261 = \\
 &= 0,0004772 + 0,0009305 = 0,001408 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Trzeci składnik prawej strony równania (1) (wpływ sił normalnych):

$$v_D^{(N)} = \sum \int_x \frac{\bar{N} N}{EA} \, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{EA_1} \cdot [(-0,6667) \cdot 4 \cdot (-20) + (-0,5) \cdot 3 \cdot (-23) + (-1) \cdot 3 \cdot (-38) \cdot 2 + 0,8333 \cdot 5 \cdot 25 + \\
&+ (-0,8333) \cdot 5 \cdot (-25)] + \frac{1}{EA_2} \cdot [(-0,6667) \cdot 6 \cdot (-20)] = \\
&= \frac{524,2}{EA_1} + \frac{80,0}{EA_2} = \frac{524,2}{945\,050} + \frac{80,0}{3\,013\,500} = 0,0005547 + 0,00002655 = 0,0005813 \text{ m.}
\end{aligned}$$

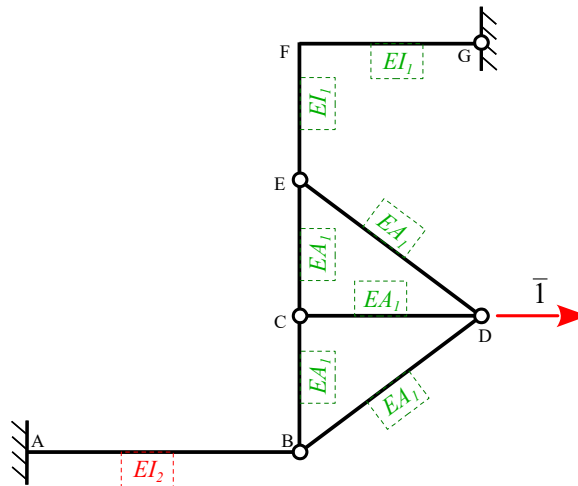
Przemieszczenie pionowe punktu D wynosi zatem:

$$v_D = v_D^{(M)} + v_D^{(T)} + v_D^{(N)} = 0,09059 + 0,001408 + 0,0005813 = 0,09258 \text{ m.}$$

Punkt D pod wpływem zadanego obciążenia przemieści się **pionowo w dół o 9,258 cm**.

4.2. Składowa pozioma

Odpowiednim obciążeniem wirtualnym w tym przypadku jest pozioma siła (przyjmujemy $\bar{P} = 1$) przyłożona w punkcie D (Rys.12). Reakcje więzów wywołane tym obciążeniem przedstawione zostały na Rys.13, siły wewnętrzne – na Rys.14, Rys.15 oraz Rys.16.



Rys.12. Obciążenie wirtualne

Pierwszy składnik prawej strony równania (1) (wpływ momentów zginających):

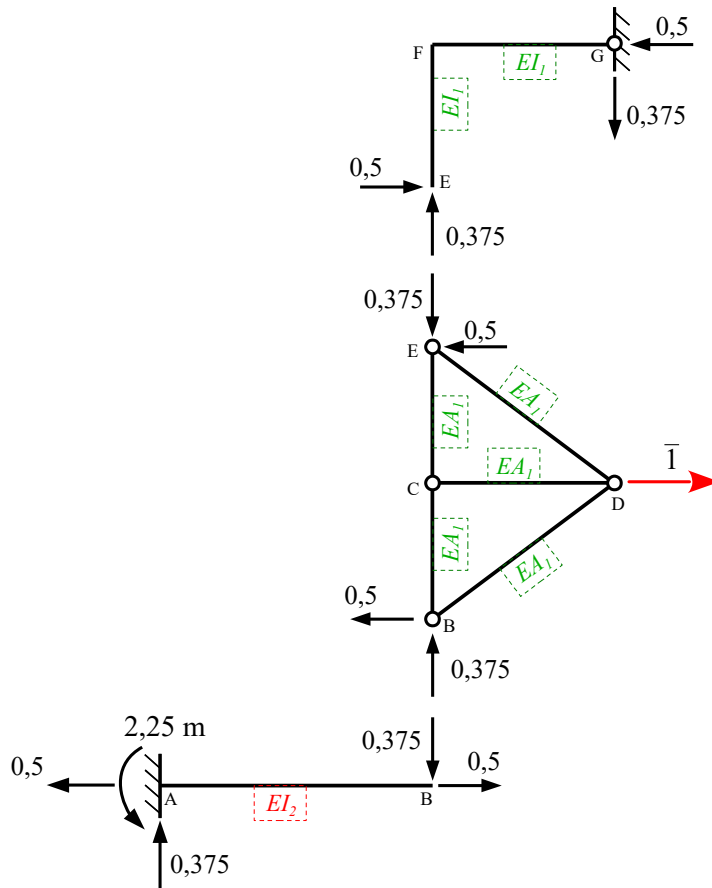
$$\begin{aligned}
h_D^{(M)} &= \sum_x \int \frac{\bar{M} M}{EI} dx = \\
&= \frac{1}{EI_1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 \right] + \frac{1}{EI_2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,25 \cdot \frac{2}{3} \cdot 318 \right] = \\
&= \frac{194}{EI_1} + \frac{1431}{EI_2} = \frac{194}{8712,5} + \frac{1431}{93\,992,5} = 0,02227 + 0,01522 = 0,03749 \text{ m.}
\end{aligned}$$

Drugi składnik prawej strony równania (1) (wpływ sił poprzecznych):

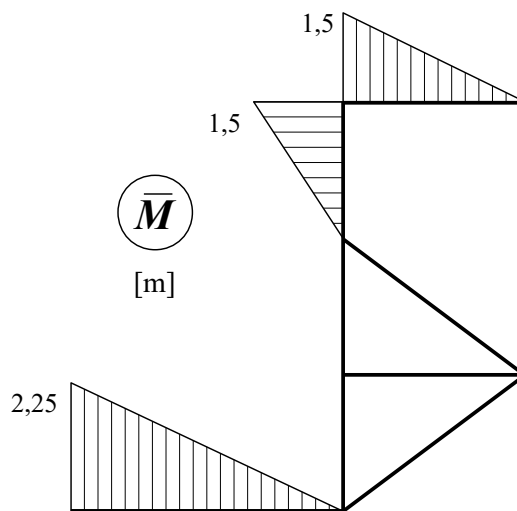
$$\begin{aligned}
h_D^{(T)} &= \sum_x \int \frac{\bar{T} T}{GA} \cdot \kappa dx = \\
&= \frac{\kappa_1}{GA_1} \cdot \left[0,375 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (23 + 7) + (-0,5) \cdot 3 \cdot (-20) \right] + \frac{\kappa_2}{GA_2} \cdot [0,375 \cdot 6 \cdot 53] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{52,5}{GA_1} \cdot \kappa_1 + \frac{119,3}{GA_2} \cdot \kappa_2 = \frac{52,5}{363\,498,5} \cdot 2,478 + \frac{119,3}{1\,159\,095} \cdot 2,261 =$$

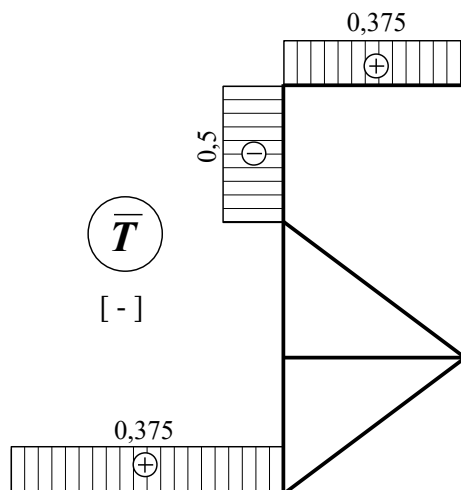
$$= 0,0003579 + 0,0002326 = 0,0005905 \text{ m.}$$



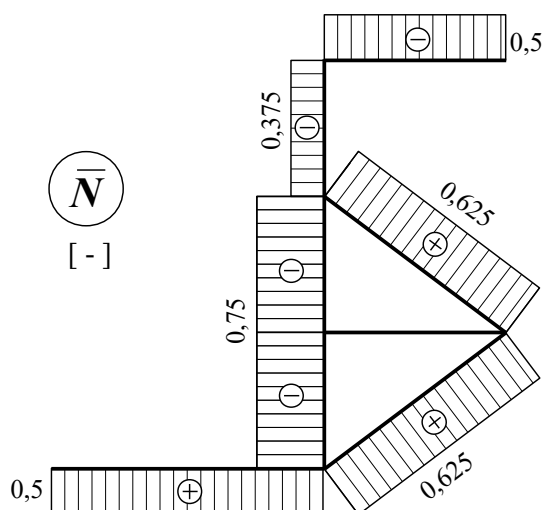
Rys.13. Reakcje więzów wywołane obciążeniem wirtualnym



Rys.14. Wykres momentów zginających wywołanych obciążeniem wirtualnym



Rys.15. Wykres sił poprzecznych wywołanych obciążeniem wirtualnym



Rys.16. Wykres sił normalnych wywołanych obciążeniem wirtualnym

Trzeci składnik prawej strony równania (1) (wpływ sił normalnych):

$$\begin{aligned}
 h_D^{(N)} &= \sum \int_x \frac{\bar{N} N}{EA} dx = \\
 &= \frac{1}{EA_1} \cdot [(-0,5) \cdot 4 \cdot (-20) + (-0,375) \cdot 3 \cdot (-23) + (-0,75) \cdot 3 \cdot (-38) \cdot 2 + 0,625 \cdot 5 \cdot 25 + \\
 &+ 0,625 \cdot 5 \cdot (-25)] + \frac{1}{EA_2} \cdot [0,5 \cdot 6 \cdot (-20)] = \\
 &= \frac{236,9}{EA_1} - \frac{60}{EA_2} = \frac{236,9}{945\,050} - \frac{60}{3\,013\,500} = 0,0002507 - 0,00001991 = 0,0002308 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Przeszczenie poziome punktu D wynosi zatem:

$$h_D = h_D^{(M)} + h_D^{(T)} + h_D^{(N)} = 0,03749 + 0,0005905 + 0,0002308 = 0,03831 \text{ m.}$$

Punkt D pod wpływem zadanego obciążenia przemieści się **poziomo w prawo o 3,831 cm.**

4.3. Przeszyczenie całkowite

Przeszyczenie punktu D (jak każde przeszyzenie) jest wielkością wektorową, do jego jednoznacznego opisu potrzebujemy zatem: wartość, kierunek oraz zwrot.

Wartość przeszyczenia punktu D:

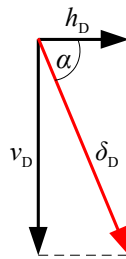
$$\delta_D = \sqrt{v_D^2 + h_D^2} = \sqrt{0,09258^2 + 0,03831^2} = 0,1002 \text{ m.}$$

Kierunek (kąt nachylenia prostej, na której znajduje się wektor):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_D}{h_D} = \frac{0,09258}{0,03831} = 2,417,$$

$$\alpha = 67,52^\circ.$$

Punkt D pod wpływem zadanego obciążenia przeszyści się o **10,02 cm** w dół wzdłuż prostej nachylonej do poziomu pod kątem $67,52^\circ$ (Rys.17).



Rys.17. Wektor przeszyczenia całkowitego punktu D

W praktyce przy obliczaniu przeszyczeń w układach zginanych pomija się wpływ sił poprzecznych i normalnych. Przy takim założeniu rozwiązanie zadania wyglądałoby następująco:

- wzływ momentów zginających na przeszyczenie – jak poprzednio, czyli:

$$v_D^{(M)} = 0,09059 \text{ m,}$$

$$h_D^{(M)} = 0,03749 \text{ m,}$$

- wzływ sił normalnych – uwzględniamy tylko kratownicę:

$$\begin{aligned} v_D^{(N)} &= \sum \int_x \frac{\bar{N} N}{EA} dx = \\ &= \frac{1}{EA_1} \cdot [(-1) \cdot 3 \cdot (-38) \cdot 2 + 0,8333 \cdot 5 \cdot 25 + (-0,8333) \cdot 5 \cdot (-25)] = \\ &= \frac{436,3}{EA_1} = \frac{436,3}{945050} = 0,0004617 \text{ m,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_D^{(N)} &= \sum \int_x \frac{\bar{N} N}{EA} dx = \\ &= \frac{1}{EA_1} \cdot [(-0,75) \cdot 3 \cdot (-38) \cdot 2 + 0,625 \cdot 5 \cdot 25 + 0,625 \cdot 5 \cdot (-25)] = \\ &= \frac{171}{EA_1} = \frac{171}{945050} = 0,0001809 \text{ m,} \end{aligned}$$

- przeszyczenie pionowe punktu D:

$$v_D = v_D^{(M)} + v_D^{(N)} = 0,09059 + 0,0004617 = 0,09105 \text{ m,}$$

- przeszyczenie poziome punktu D:

$$h_D = h_D^{(M)} + h_D^{(N)} = 0,03749 + 0,0001809 = 0,03767 \text{ m},$$

- wartość przemieszczenia punktu D:

$$\delta_D = \sqrt{v_D^2 + h_D^2} = \sqrt{0,09105^2 + 0,03767^2} = 0,09853 \text{ m},$$

- kierunek (kąt nachylenia prostej, na której znajduje się wektor):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_D}{h_D} = \frac{0,09105}{0,03767} = 2,417,$$

$$\alpha = 67,52^\circ,$$

- punkt D pod wpływem zadanego obciążenia przemieści się o **9,853 cm** w dół wzdłuż prostej nachylonej do poziomu pod kątem $67,52^\circ$ (Rys.17),
- różnica, a więc wpływ sił poprzecznych i normalnych z części zginanej układu wynosi:

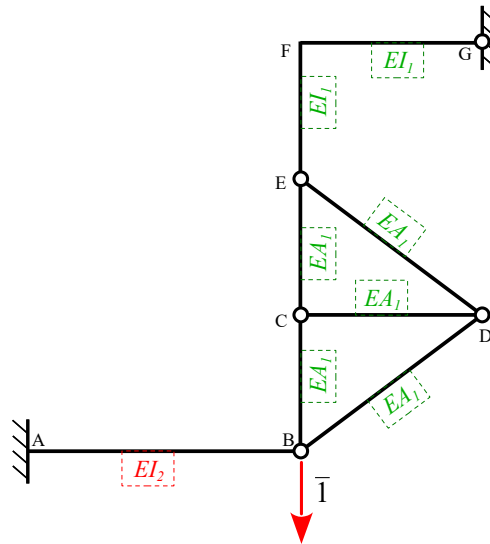
$$\Delta \delta_D = 0,1002 - 0,09853 = 0,00167 \text{ m},$$

$$\Delta \delta_D^{\%} = \frac{0,00167}{0,1002} \cdot 100\% = 1,667\%,$$

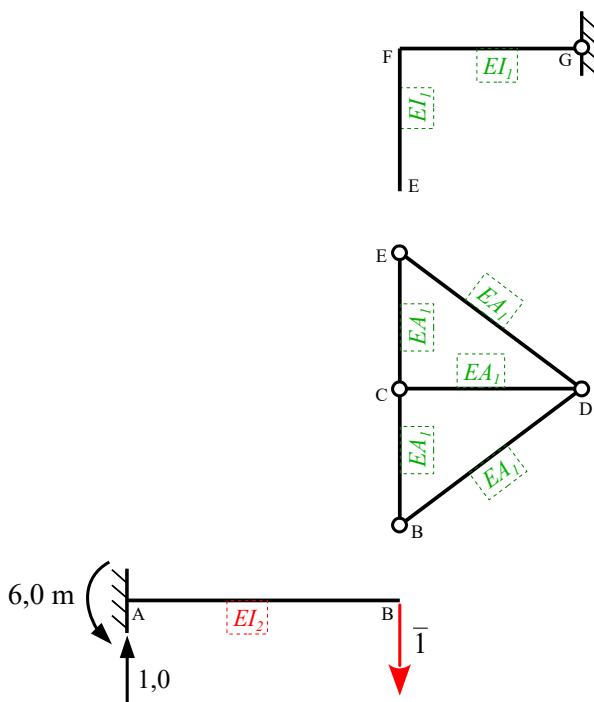
co potwierdza, że wpływ sił poprzecznych i normalnych na przemieszczenia w układach zginanych jest pomijalnie mały.

5. Przemieszczenie pionowe węzła B

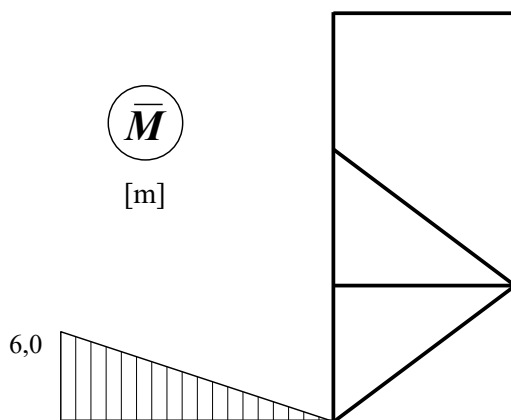
Odpowiednie obciążenie wirtualne zostało przedstawione na Rys.18. Reakcje więzów (niezerowe) – na Rys.19, siły wewnętrzne – na Rys.20 oraz Rys.21, siły normalne są w tym przypadku zerowe.



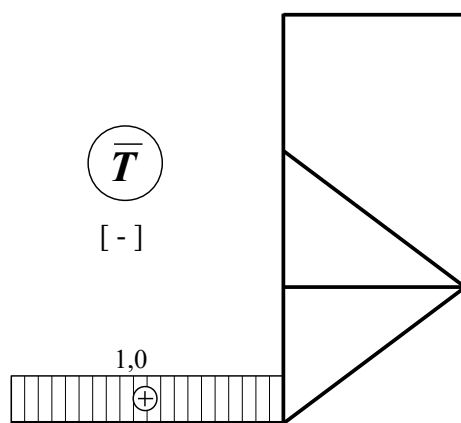
Rys.18. Obciążenie wirtualne



Rys.19. Reakcje więzów wywołane obciążeniem wirtualnym



Rys.20. Wykres momentów zginających wywołanych obciążeniem wirtualnym



Rys.21. Wykres sił poprzecznych wywołanych obciążeniem wirtualnym

Pierwszy składnik prawej strony równania (1) (wpływ momentów zginających):

$$v_B^{(M)} = \sum \int_x \frac{\bar{M} M}{EI} dx = \frac{1}{EI_2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 318 \right] = \frac{3816}{EI_2} = \frac{3816}{93\,992,5} = 0,04060 \text{ m.}$$

Drugi składnik prawej strony równania (1) (wpływ sił poprzecznych):

$$v_B^{(T)} = \sum \int_x \frac{\bar{T} T}{GA} \cdot \kappa dx = \frac{\kappa_2}{GA_2} \cdot [1 \cdot 6 \cdot 53] = \frac{318}{GA_2} \cdot \kappa_2 = \frac{52,5}{363\,498,5} \cdot 2,478 = 0,002168 \text{ m.}$$

Trzeci składnik prawej strony równania (1) (wpływ sił normalnych):

$$v_B^{(N)} = \sum \int_x \frac{\bar{N} N}{EA} dx = 0.$$

Przemieszczenie pionowe punktu B wynosi zatem:

$$v_B = v_B^{(M)} + v_B^{(T)} + v_B^{(N)} = 0,04060 + 0,002168 + 0 = 0,04277 \text{ m.}$$

Punkt B pod wpływem zadanego obciążenia przemieści się **pionowo w dół o 4,277 cm**.

Procentowy udział wpływu sił poprzecznych na wartość przemieszczenia:

$$v_B^{(T)\%} = \frac{0,002168}{0,04060} \cdot 100\% = 5,340\%.$$

W tym przypadku wpływ sił poprzecznych jest większy, wciąż jednak pomijalnie mały.