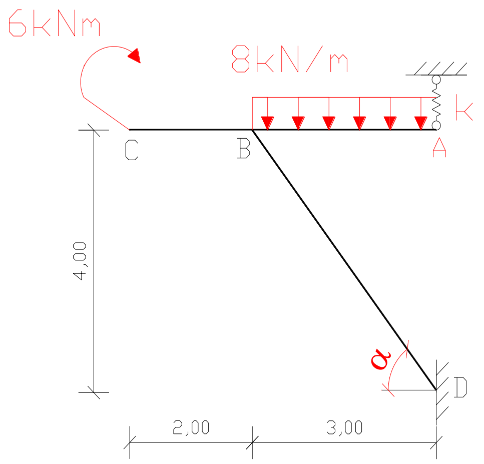
# Zadanie

Dla zadanej ramy statycznie niewyznaczalnej:

a) wyznaczyć wykresy sił wewnętrznych korzystając z metody sił,
b) wykonać sprawdzenie kinematyczne,
c) obliczyć przemieszczenie poziome punktu A,
d) wyznaczyć wypadkowe przemieszczenie punktu A.

# Rozwiązanie

### *1. Schemat konstrukcji:*

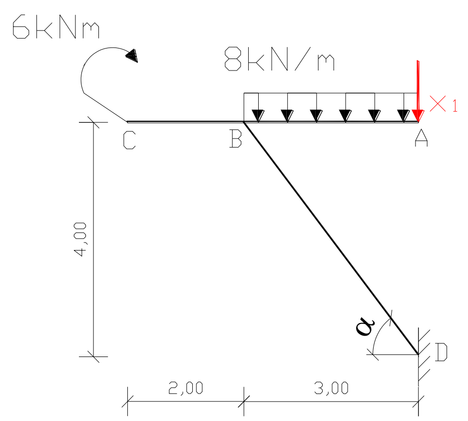



**SSN=1**;

$EI = const$

$k = \dfrac{EI}{6}$

### *2. Układ podstawowy*




Układ spełnia warunki statycznej wyznaczalności i geometrycznej niezmienności.

### *3. Układ równań kanonicznych*

$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1P} = 0$

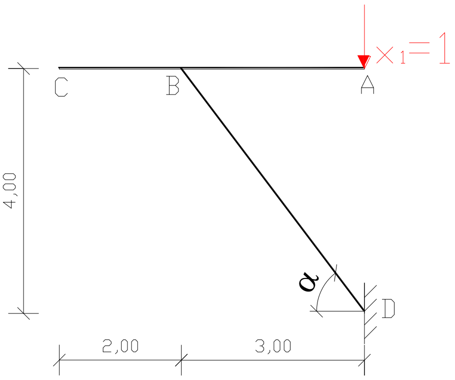
gdzie: współczynniki $\delta_{ik}$, $\delta_{iP}$:

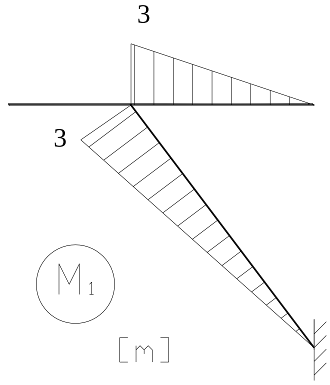
$$\delta_{ik} = \sum \int_0^l \frac{M_i \cdot M_k}{EI} dx + \frac{R_i \cdot R_k}{k}; \qquad \delta_{iP} = \sum \int_0^l \frac{M_i M_P}{EI} dx + \frac{R_i \cdot R_P}{k};$$

gdzie: $M_i$, $R_i$ – momenty zginające oraz reakcja w podporze sprężystej od obciążenia siłą jednostkową $X_i$=1,0 (w układzie podstawowym)

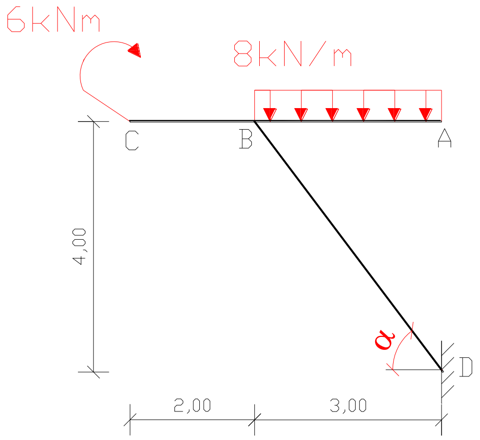
$M_p$, $R_p$ – momenty zginające oraz reakcja w podporze sprężystej od obciążenia zewnętrznego (w układzie podstawowym).

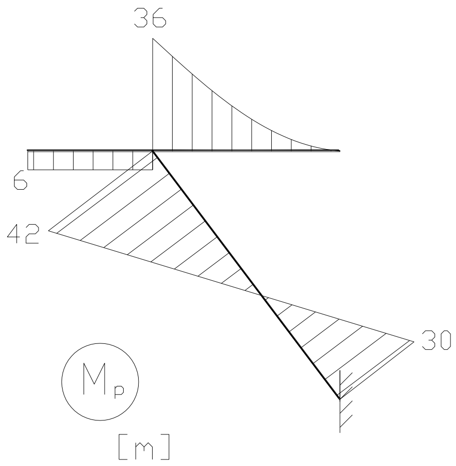
### *3.1. Stan $X_1 = 1$*




### *3.2. Stan „P"*




### *3.3. Obliczenie współczynników $\delta_{ik}$, $\delta_{iP}$*

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \frac{R_1 \cdot R_1}{k}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \frac{2}{3}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \frac{2}{3}\cdot 3\right] + 1\cdot 1\cdot \frac{6}{EI} = \frac{30}{EI}$$

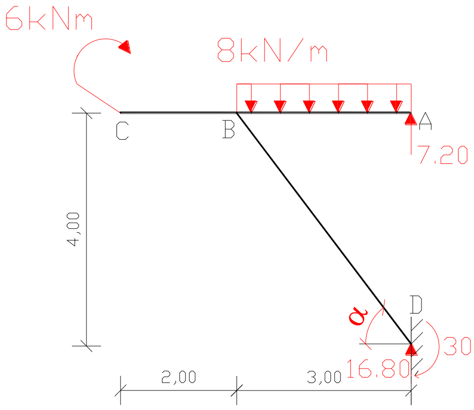
$$\delta_{1P} = \sum \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_P}{EI} dx + \frac{R_1 \cdot R_P}{k}$$

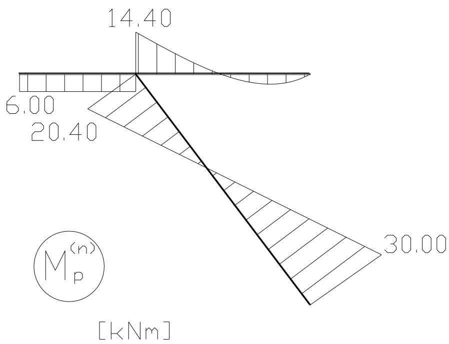
$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \frac{2}{3}\cdot 36 - \frac{2}{3}\cdot \frac{8\cdot 3^2}{8}\cdot 3\cdot \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \left(\frac{2}{3}\cdot 42 - \frac{1}{3}\cdot 30\right)\right] + 0 = \frac{216}{EI}$$

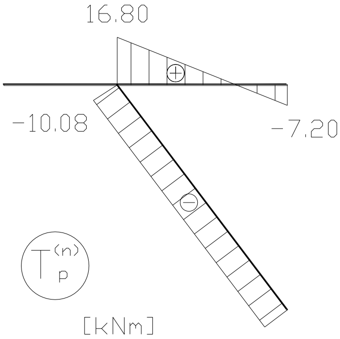
### *3.4. Rozwiązanie układu równań kanonicznych*

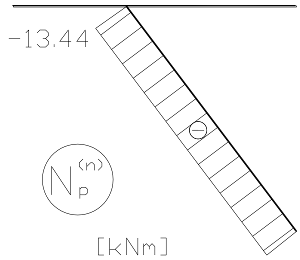
$30/EI \cdot \boldsymbol{X_1} + 216/EI = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X_1 = -7{,}200\ kN}$

### 4. *Wykresy sił wewnętrznych w ramie*



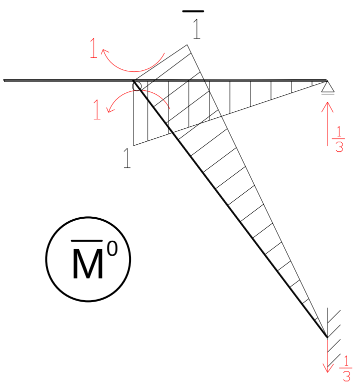

### 5. *Kontrola kinematyczna*

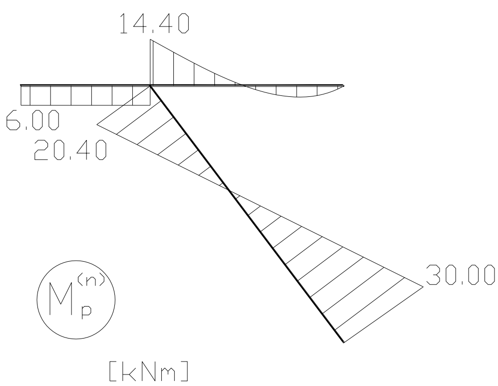
Przyjęto inny od wcześniej wykorzystanego do obliczeń układ statycznie wyznaczalny, spełniający cechy układu podstawowego, w ramach kontroli kinematycznej wyznaczony zostanie względny kąt obrotu przekrojów połączonych przegubem

Zgodnie z równaniem pracy wirtualnej oraz po zastosowaniu twierdzenia redukcyjnego:

$$\overline{1}\cdot\Delta\varphi_B=\sum\int_0^l\frac{M_p^{(n)}\overline{M}^{(n)}}{EI}dx+\frac{R_p^{(n)}\cdot\overline{R}^{(n)}}{k}=\sum\int_0^l\frac{M_p^{(n)}\overline{M}^{0}}{EI}dx+\frac{R_p^{(n)}\cdot\overline{R}^{0}}{k}$$

Wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego oraz rzeczywistego:



Ostatecznie:

$$\overline{1}\cdot\Delta\varphi_B=\sum\int_0^l\frac{M_p^{(n)}\overline{M}^0}{EI}dx+\frac{R_P^{(n)}\cdot\overline{R}^0}{k}=$$

$$=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot3\cdot1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot14{,}4+\frac{2}{3}\cdot\frac{8\cdot3^2}{8}\cdot3\cdot\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot5\cdot1\cdot(\frac{1}{3}\cdot30-\frac{2}{3}\cdot20{,}4)\right]+\frac{1}{3}\cdot7{,}20\cdot\frac{6}{EI}=\frac{0}{EI}=0$$

### *6. Przemieszczenie poziome punktu A (pomijamy wpływ sił tnących i normalnych)*

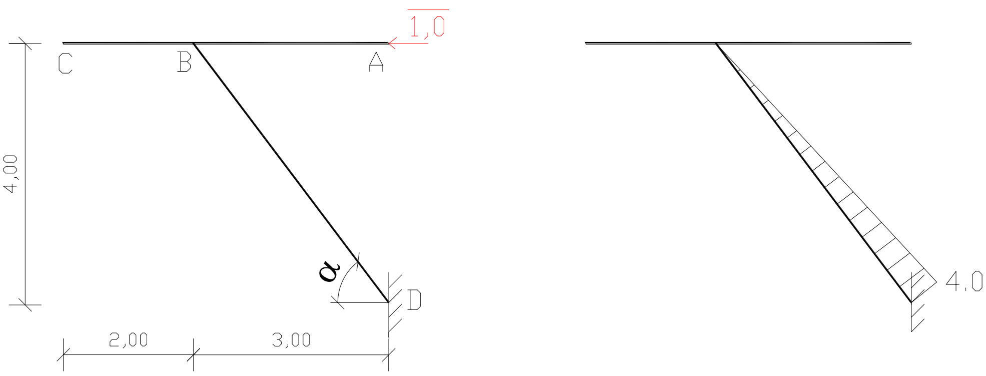
Zgodnie z równaniem prac wirtualnych:

$$\overline{1}\cdot\delta_A^H=\sum\int_0^l\frac{M_p^{(n)}\overline{M}^{(n)}}{EI}dx+\frac{R_p^{(n)}\overline{R}^{(n)}}{k}$$

Po zastosowaniu twierdzenia redukcyjnego:

$$\overline{1}\cdot\delta_A^H=\sum\int_0^l\frac{M_p^{(n)}\overline{M}^0}{EI}dx+\frac{R_p^{(n)}\overline{R}^0}{k}$$

Wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego:




Przemieszczenie poziome punktu A:

$$\delta_A^H=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot(\frac{2}{3}\cdot30-\frac{1}{3}\cdot20{,}4)\right]=\frac{132}{EI}$$

Wymiarowanie przekroju:

$$w_x^{potrz}=\frac{|M_{ekstr}|}{\sigma_x}=\frac{3000}{21{,}5}=139{,}53\ cm^3$$

Przyjęto I 180: $w_x = 161{,}0\ cm^3$
$I_x = 1450\ cm^4$
$EI = 2972{,}50\ kNm^2$

Dla przyjętego przekroju przemieszczenie poziome punktu A wynosi:

$$\delta_A^H=\frac{132}{EI}=0{,}0444m=4{,}44cm$$

### *7. Przemieszczenie pionowe punktu A*

Szukane przemieszczenie równa się wydłużeniu sprężyny.

- reakcja w podporze sprężystej: $R_A = X_1 = 7{,}2\ kN$
- podatność sprężyny $\frac{1}{k} = \frac{6}{EI}$

A zatem przemieszczenie pionowe punktu A (dla przyjętego wcześniej przekroju I180) wynosi:

$$\bar{1} \cdot \delta_A^V = 7{,}2 \cdot \frac{6}{EI} = \frac{43{,}2}{EI} = 0{,}0145\, m = 1{,}45\, cm$$

### *8. Przemieszczenie wypadkowe punktu A*

$$|\delta_A| = \sqrt{\left(\delta_A{}^H\right)^2 + \left(\delta_A{}^V\right)^2} = \sqrt{4{,}44^2 + 1{,}45^2} = 4{,}67cm$$