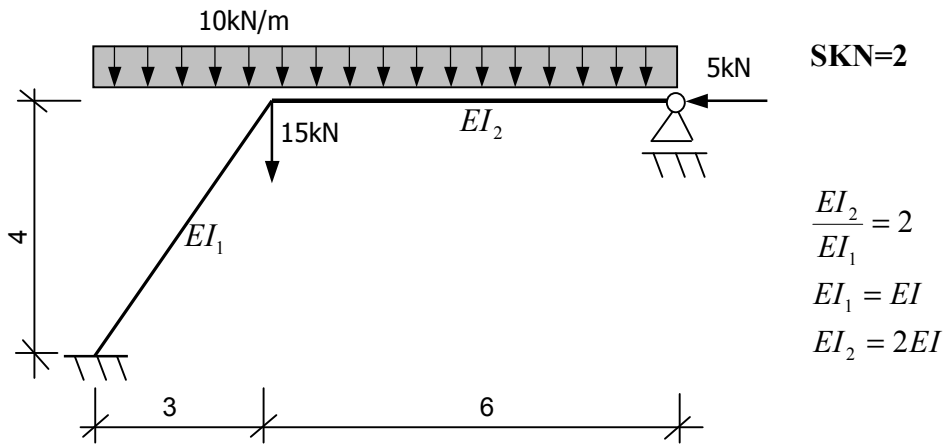
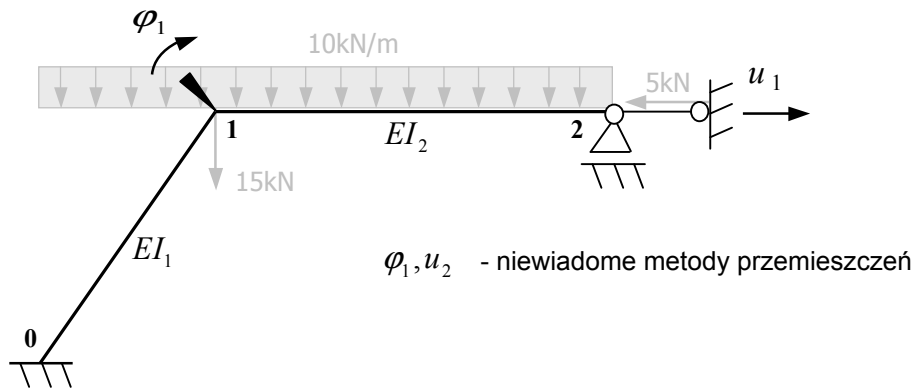


**Schemat układu:**



**Układ podstawowy:**

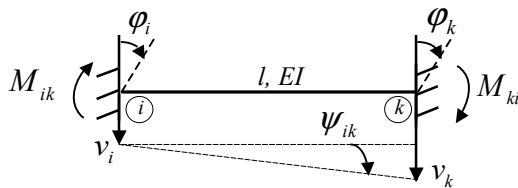


**Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń:**

$$\begin{cases} r_{11}\varphi_1 + r_{12}u_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21}\varphi_1 + r_{22}u_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

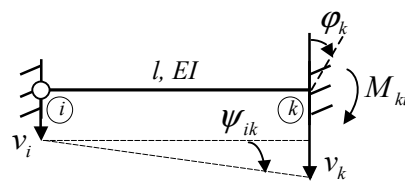
$r_{ik}$  – reakcja w węźle  $i$  wywołana jednostkowym przemieszczeniem węzła  $k$   
 $r_{iP}$  – reakcja w węźle  $i$  wywołana obciążeniem zewnętrznym  
 $\varphi_1$  – obrót węzła 1  
 $u_2$  – przemieszczenie poziome węzła 2

**Wzory transformacyjne** określają wartości **momentów przęsłowych przywęzłowych**  $M_{ik}$ ,  $M_{ki}$  wywołanych obrotami i przemieszczeniami liniowymi (prostopadłymi do osi pręta) węzłów  $i$  oraz  $k$ :



$$M_{ik} = \frac{2EI}{l} (2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik})$$

$$M_{ki} = \frac{2EI}{l} (\varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi_{ik})$$



$$M_{ik} = 0$$

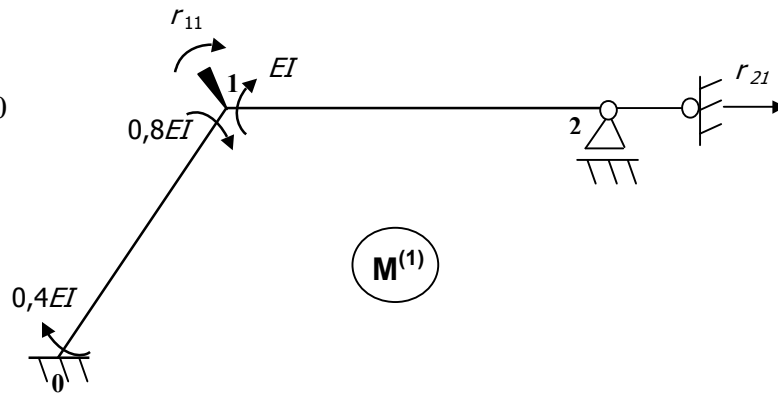
$$M_{ki} = \frac{3EI}{l} (\varphi_k - \psi_{ik})$$

zasada znakowania momentów, kątów obrotu węzłów i cięciw:  
**zwrot prawoskrętny => wartość dodatnia**

**Stan  $\varphi_1 = 1$**

$$u_2 = 0 \Rightarrow \psi_{ik} = 0$$

$$\varphi_0 = 0$$



- momenty przeszłowe przywęzłowe:

$$M_{01}^{(1)} = \frac{2EI_1}{l} (2\varphi_0 + \varphi_1 - 3\psi_{01}) = \frac{2EI_1}{l} \varphi_1 = \frac{2EI}{5} = 0,4EI$$

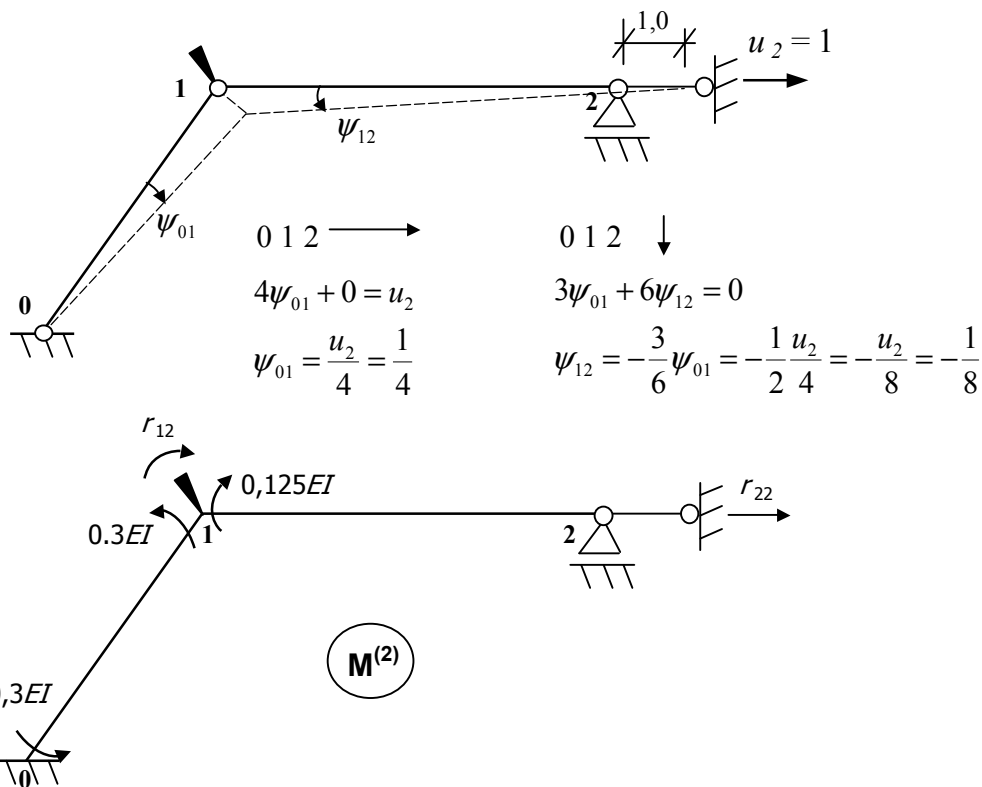
$$M_{10}^{(1)} = \frac{2EI_1}{l} (2\varphi_1 + \varphi_0 - 3\psi_{01}) = \frac{2EI_1}{l} 2\varphi_1 = \frac{4EI_1}{l} \varphi_1 = \frac{4EI}{5} = 0,8EI$$

$$M_{12}^{(1)} = \frac{3EI_2}{l} (\varphi_1 - \psi_{121}) = \frac{3EI_2}{l} \varphi_1 = \frac{3 \cdot 2EI}{6} = EI$$

**Stan  $u_2 = 1$**

$$\varphi_0 = \varphi_1 = 0$$

- z równań łańcucha kinematycznego wyznaczamy kąty obrotów cięciw prętów  $\psi_{ik}$



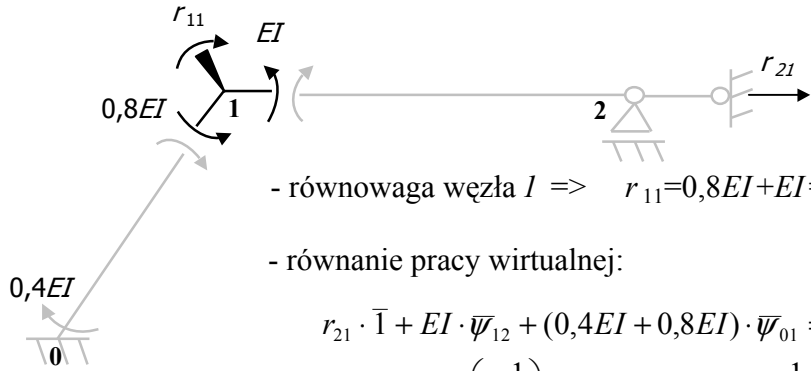
- momenty przeszłowe przywęzłowe:

$$M_{01}^{(2)} = \frac{2EI_1}{l} (2\varphi_0 + \varphi_1 - 3 \cdot \psi_{01}) = \frac{2EI_1}{l} (-3 \cdot \psi_{01}) = -\frac{6EI_1}{l} \psi_{01} = -\frac{6EI}{5} \cdot \frac{1}{4} = -0,3EI$$

$$M_{10}^{(2)} = M_{01}^{(2)} = -0,3EI$$

$$M_{12}^{(2)} = \frac{3EI_2}{l} (\varphi_1 - \psi_{12}) = -\frac{3EI_2}{l} \psi_{12} = -\frac{3 \cdot 2EI}{6} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = 0,125EI$$

**Wyznaczenie współczynników  $r_{ik}$  układu równań kanonicznych:**



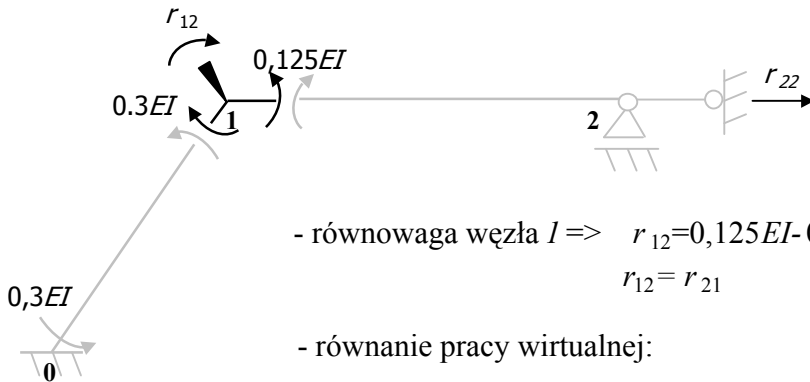
- równowaga węzła 1 =>  $r_{11} = 0,8EI + EI = 1,8EI$

- równanie pracy wirtualnej:

$$r_{21} \cdot \bar{1} + EI \cdot \bar{\psi}_{12} + (0,4EI + 0,8EI) \cdot \bar{\psi}_{01} = 0$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + EI \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + (0,4EI + 0,8EI) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$r_{21} = -0,175EI$$



- równowaga węzła 1 =>  $r_{12} = 0,125EI - 0,3EI = -0,175EI$

$$r_{12} = r_{21}$$

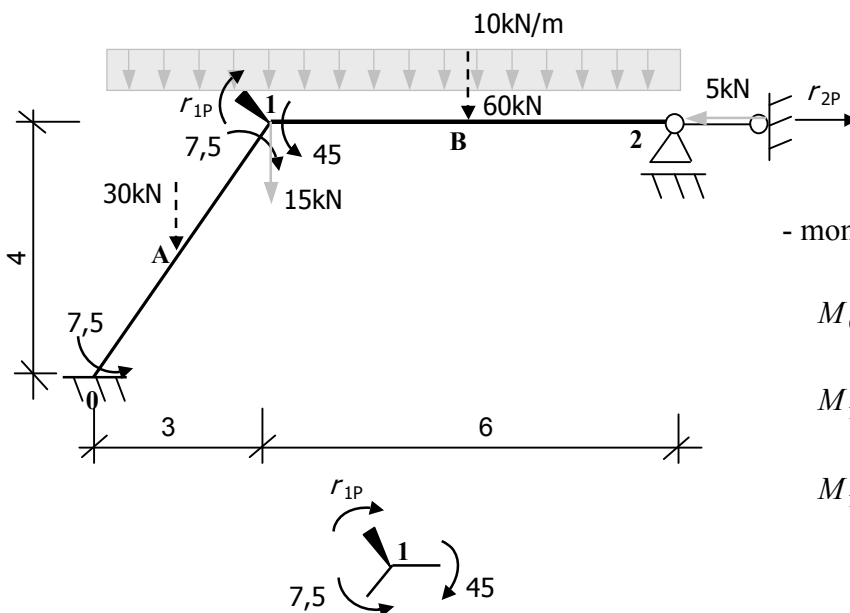
- równanie pracy wirtualnej:

$$r_{22} \cdot \bar{1} + 0,125EI \cdot \bar{\psi}_{12} - (0,3EI + 0,3EI) \cdot \bar{\psi}_{01} = 0$$

$$r_{22} \cdot \bar{1} + 0,125EI \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - (0,3EI + 0,3EI) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$r_{22} = 0,1656EI$$

**Wyznaczenie współczynników  $r_{iP}$  układu równań kanonicznych:**

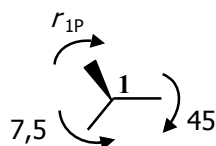


- momenty przesłowe przywęzłowe:

$$M_{01}^{(P)} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{10 \cdot 3^2}{12} = -7,5kNm$$

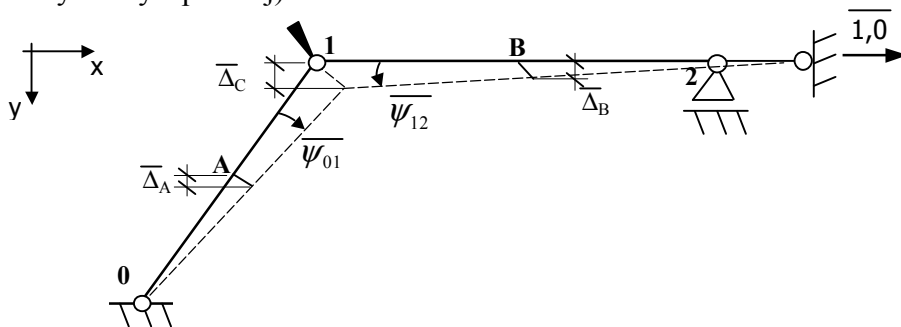
$$M_{10}^{(P)} = \frac{ql^2}{12} = \frac{10 \cdot 3^2}{12} = 7,5kNm$$

$$M_{12}^{(P)} = -\frac{ql^2}{8} = -\frac{10 \cdot 6^2}{8} = -45kNm$$



- równowaga węzła 1 =>  $r_{1P} = 7,5 - 45 = -37,5kNm$

- wyznaczenie  $r_{2P}$  z równania pracy wirtualnej (stan sił - na rys. powyżej, stan przemieszczeń wirtualnych - rys. poniżej):



RPW

(praca siły na odpowiadającym jej przemieszczeniu jest dodatnia, jeśli zwrot siły i przemieszczenia jest taki sam):

$$r_{2P} \cdot \bar{1} + M_{12}^P \cdot \bar{\psi}_{12} + (M_{01}^P + M_{10}^P) \cdot \bar{\psi}_{01} + 10 \cdot 3 \cdot \bar{\Delta}_A + 10 \cdot 6 \cdot \bar{\Delta}_B + 15 \cdot \bar{\Delta}_C - 5 \cdot \bar{\Delta}_D = 0$$

przemieszczenia:  $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$  wyznaczamy z równań łańcucha kinematycznego (znak dodatni oznacza przemieszczenia o zwrotach zgodnych z osiami układu współrzędnych.):

$$\begin{array}{ccc} 0 \text{ A} \rightarrow & 3 \text{ B} \downarrow & 1 \text{ C} \downarrow & \bar{\Delta}_D = 1,0 \\ 1,5\bar{\psi}_{12} = \bar{\Delta}_A & -3\bar{\psi}_{12} = \bar{\Delta}_B & 3\bar{\psi}_{01} = \bar{\Delta}_C & \\ \bar{\Delta}_A = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} & \bar{\Delta}_B = -3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8} & \bar{\Delta}_C = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} & \end{array}$$

- stąd:  $r_{2P} - 45 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 30 \cdot \frac{3}{8} + 60 \cdot \frac{3}{8} + 15 \cdot \frac{3}{4} - 5 \cdot 1 = 0$

$$r_{2P} = -45,625 \text{ kNm}$$

**Wyznaczenie niewiadomych układu równań kanonicznych:**

$$\begin{cases} 1,8EI \cdot \varphi_1 - 0,175EI \cdot u_2 - 37,5 = 0 \\ -0,175EI \cdot \varphi_1 + 0,1656EI \cdot u_2 - 45,625 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{53,072}{EI} \\ u_2 = \frac{331,598}{EI} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1,8EI & -0,175EI \\ -0,175EI & 0,1656EI \end{vmatrix} = 0,2675EI^2$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 37,5 & -0,175EI \\ 45,625 & 0,1656EI \end{vmatrix} = 14,1944EI$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1,8EI & 37,5 \\ -0,175EI & 45,625 \end{vmatrix} = 88,6875EI$$

**Wyznaczenie rzeczywistych momentów przywęzłowych ze wzorów transformacyjnych**

$$\begin{aligned} M_{01} &= \frac{2EI_1}{l} (2\varphi_0 + \varphi_1 - 3\psi_{01}) + M_{01}^{(P)} = \frac{2EI}{l} \left( \varphi_1 - 3 \cdot \frac{u_2}{4} \right) + M_{01}^{(P)} = \\ &= \frac{2EI}{5} \left( \frac{53,072}{EI} - 3 \cdot \frac{331,598}{4EI} \right) - 7,5 = -85,7506 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{10} &= \frac{2EI_1}{l} (2\varphi_1 + \varphi_0 - 3\psi_{01}) + M_{10}^{(P)} = \frac{2EI}{l} \left( 2\varphi_1 - 3 \cdot \frac{u_2}{4} \right) + M_{10}^{(P)} = \\ &= \frac{2EI}{5} \left( 2 \cdot \frac{53,072}{EI} - 3 \cdot \frac{331,598}{4EI} \right) + 7,5 = -49,5218 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{3EI_2}{l} (\varphi_1 - \psi_{12}) + M_{12}^{(P)} = \frac{3 \cdot 2EI}{l} \left( \varphi_1 + \frac{u_2}{8} \right) + M_{12}^{(P)} = \\ &= \frac{6EI}{6} \left( \frac{53,072}{EI} + \frac{331,598}{8EI} \right) - 45 = 49,5218 \text{ kNm} \end{aligned}$$

...lub korzystając z zasady superpozycji:

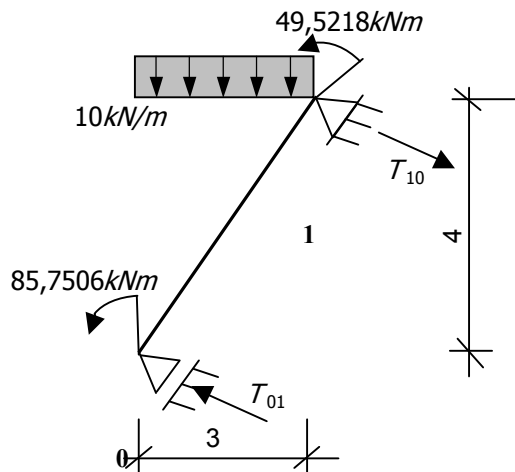
$$M_{01} = \varphi_1 M_{01}^{(1)} + u_2 M_{01}^{(2)} + M_{01}^{(P)} = \frac{53,072}{EI} \cdot 0,4EI + \frac{331,598}{EI} \cdot (-0,3EI) - 7,5 = -85,7506 \text{ kNm}$$

$$M_{10} = \varphi_1 M_{10}^{(1)} + u_2 M_{10}^{(2)} + M_{10}^{(P)} = \frac{53,072}{EI} \cdot 0,8EI + \frac{331,598}{EI} \cdot (-0,3EI) + 7,5 = -49,5218 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = \varphi_1 M_{12}^{(1)} + u_2 M_{12}^{(2)} + M_{12}^{(P)} = \frac{53,072}{EI} \cdot 4EI + \frac{331,598}{EI} \cdot 0,125EI - 45 = 49,5218 \text{ kNm}$$

### Wyznaczenie sił tnących w poszczególnych prętach:

każdy z prętów obliczamy jak belkę swobodnie podpartą, poddaną działaniu momentów podporowych i obciążeniu w obrębie przęsła.



$$\sum M_0 = 0$$

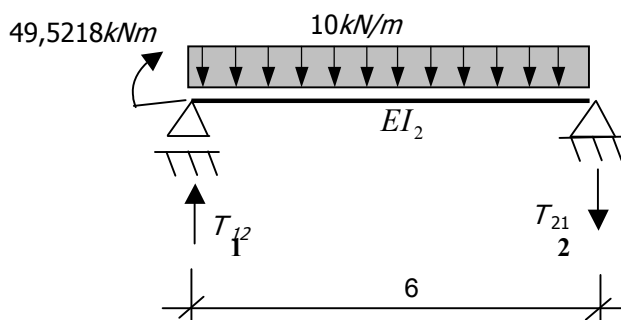
$$85,7506 + 49,5218 - T_{10} \cdot 5 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

$$T_{10} = 18,0545 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$T_{01} \cdot 5 - 85,7506 - 49,5218 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

$$T_{01} = 36,0545 \text{ kN}$$



$$\sum M_1 = 0$$

$$T_{21} \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 3 + 49,5218 = 0$$

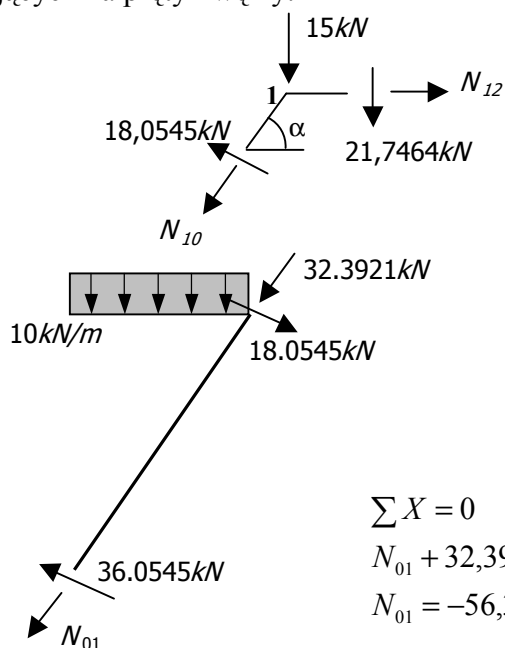
$$T_{21} = -38,2536 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$T_{12} \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 + 49,5218 = 0$$

$$T_{12} = 21,7464 \text{ kN}$$

Wyznaczenie sił normalnych w poszczególnych prętach: -na podstawie równań równowagi sił działających na pręty i węzły.



$$\sum Y = 0$$

$$21,7464 + 15 - 18,0545 \cos \alpha + N_{10} \sin \alpha = 0$$

$$N_{10} = -32,3921 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

$$N_{12} - 18,0545 \sin \alpha + 32,3921 \cos \alpha = 0$$

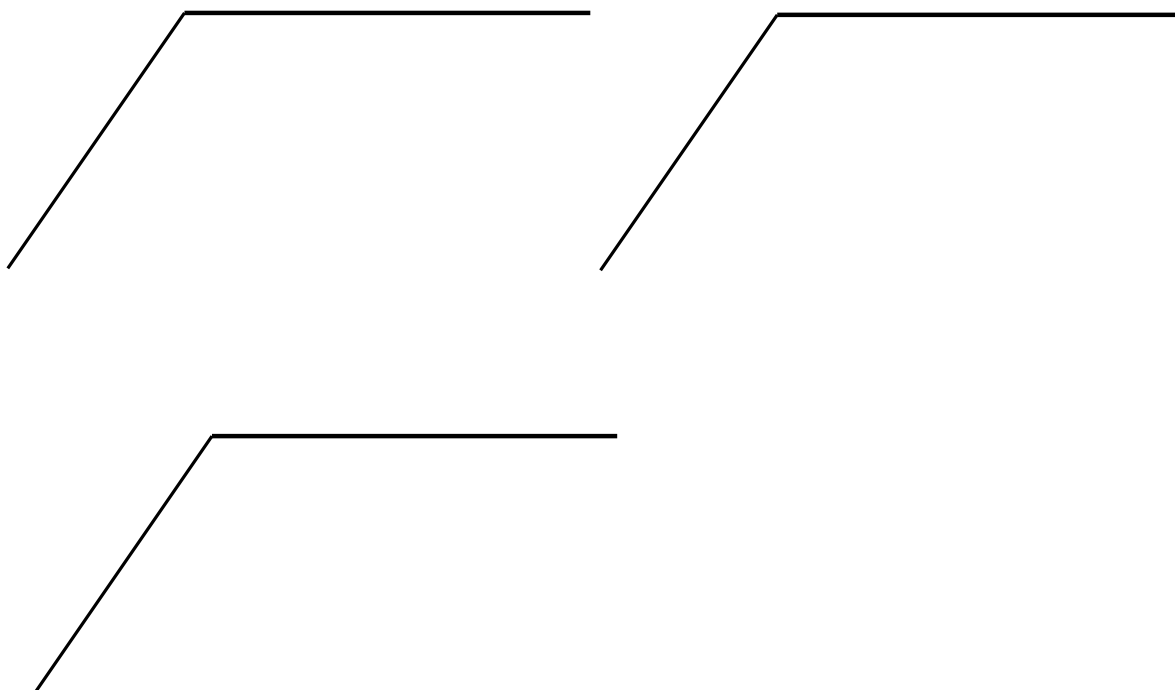
$$N_{12} = -4,9918 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

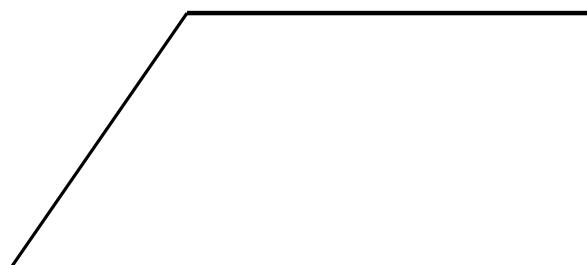
$$N_{01} + 32,3921 + 10 \cdot 3 \sin \alpha = 0$$

$$N_{01} = -56,3921 \text{ kN}$$

Ostateczne wykresy:



Kontrola statyczna:



$$\sum X = 0$$

$$-4,9918 - 36,0545 \sin \alpha + 56,3921 \cos \alpha = -0,00014 \cong 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$-10 \cdot 9 - 15 + 38,2536 + 36,0545 \cos \alpha + 56,3921 \sin \alpha = -0,00002 \cong 0$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$36,0545 \cdot 5 - 85,7506 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 \cdot 6 \cdot 3 - 38,2536 \cdot 6 = -0,0003 \cong 0$$

Kontrola kinematyczna: