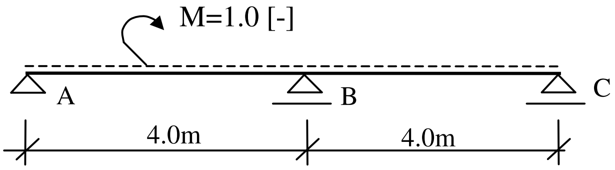
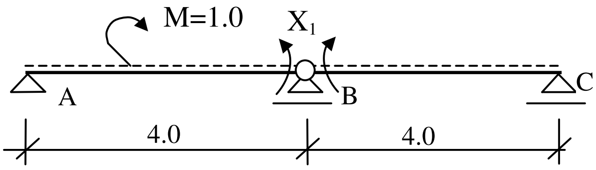
Wyznaczyć linie wpływu reakcji R_B dla belki (EI=const):



<u>Rozwiązanie - wersja I:</u>

Układ podstawowy:

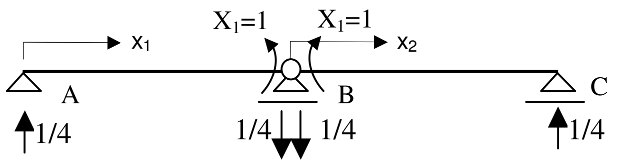


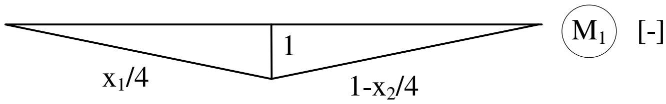
SSN=1

URK: $\delta_{11} LwX_1 + \delta_{1P}(x) = 0$

$$\boxed{LwR_B = LwR_B^0 + R_B^{(X_1=1)} \cdot LwX_1 + R_B^{(X_2=1)} \cdot LwX_2}$$

Stan X_1=1





$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2\right) = \frac{8}{3EI} \qquad \left[\frac{m}{kNm^2}\right]$$

$\delta_{1P}(x) = \delta_{P1}(x)$ - zgodnie z twierdzeniem Maxwella (sformułowanym w 1864r. ☺);

$\delta_{1P}(x)$ - przemieszczenie uogólnione punktu przyłożenia siły X_1, po kierunku tej siły (czyli wzajemny obrót przekrojów B^L oraz B^P) wywołane działaniem siły P=1,0 poruszającej się po belce, a więc linia wpływu tego przemieszczenia;

$\delta_{P1}(x)$ - przemieszczenie uogólnione punktu przyłożenia siły P, po kierunku tej siły, czyli funkcja kątów obrotu przekrojów belki: dy/dx, wywołane siłą X_1=1; wyznaczamy korzystając np. z różniczkowego równania linii ugięcia $\delta_{P1}(x) = dy/dx$ lub z równania pracy wirtualnej;

<u><A;B></u>

$$M(x) = \frac{x_1}{4}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x_1}{4}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1^2}{8} + C$$

$$EIy = -\frac{x_1^3}{24} + Cx_1 + D$$

war.brzegowe:

1) $x_1 = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow D = 0$

2) $x_1 = 4 \rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4^3}{24} + 4C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$

$$\delta_{P1}^{AB}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{x_1^2}{8} + \frac{2}{3}\right)$$

<u><B;C></u>

$$M(x)=1-\frac{x_2}{4}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x_2}{4}-1$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{x_2^{\,2}}{8}-x_2+C$$

$$EIy=\frac{x_2^{\,3}}{24}-\frac{x_2^2}{2}+Cx_2+D$$

war. brzgowe :

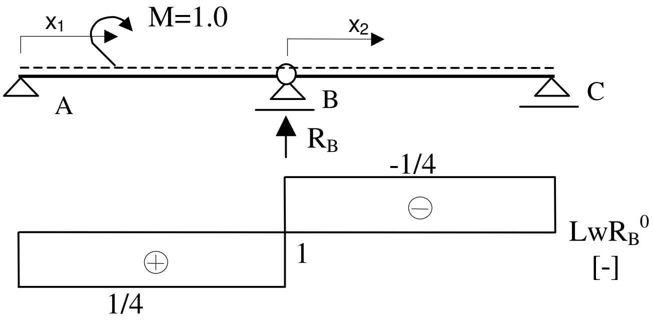
1) $x_2=0 \;\rightarrow y=0 \;\Rightarrow D=0$

2) $x_2=4 \;\rightarrow y=0 \;\Rightarrow\; 0=\frac{4^3}{24}-\frac{4^2}{2}+4C \;\Rightarrow$

$$\delta_{P1}^{BC}(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{x_2^{\,2}}{8}-x_2+\frac{4}{3}\right)$$

$$LwX_1^{AB}=-\frac{\delta_{1P}^{AB}(x)}{\delta_{11}}=-\frac{3EI}{8}\cdot\frac{1}{EI}\left(-\frac{x_1^{\,2}}{8}+\frac{2}{3}\right)=\frac{3x_1^{\,2}}{64}-\frac{1}{4}$$

$$LwX_1^{BC}=-\frac{\delta_{1P}^{BC}(x)}{\delta_{11}}=-\frac{3EI}{8}\cdot\frac{1}{EI}\left(\frac{x_2^{\,2}}{8}-x_2+\frac{4}{3}\right)=-\frac{3x_2^2}{64}+\frac{3x_2}{8}-\frac{1}{2}$$

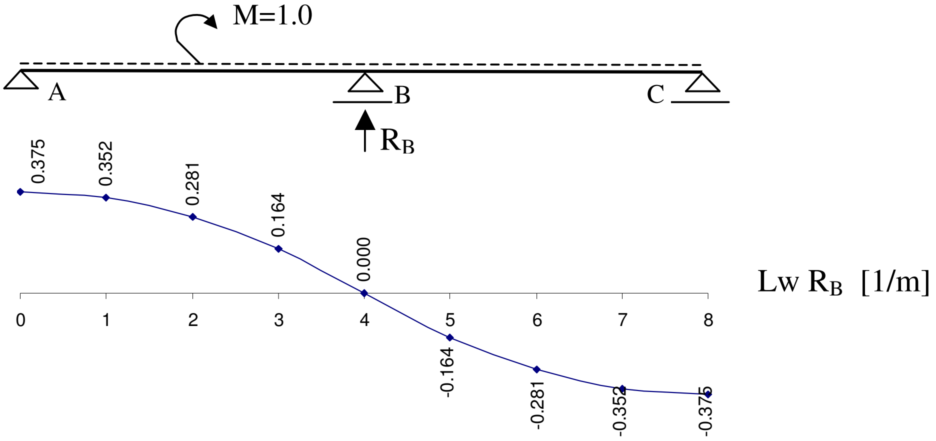


<u>$<A;B>$</u>

$$LwR_B^{AB}=LwR_B^{0\,AB}+R_B^{(X_1=1)}\cdot LwX_1^{AB}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{3x_1^{\,2}}{64}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3x_1^{\,2}}{128}+\frac{3}{8}$$

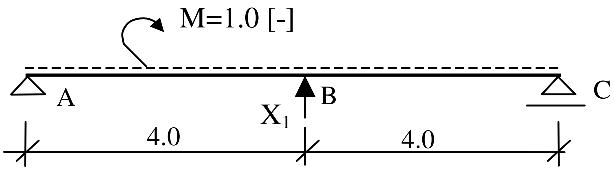
<u>$<B;C>$</u>

$$LwR_B^{BC}=LwR_B^{0\,BC}+R_B^{(X_1=1)}\cdot LwX_1^{BC}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3x_2^2}{64}+\frac{3x_2}{8}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3x_2^{\,2}}{128}-\frac{3x_2}{16}$$



<u>Rozwiązanie - wersja II:</u>

Układ podstawowy:



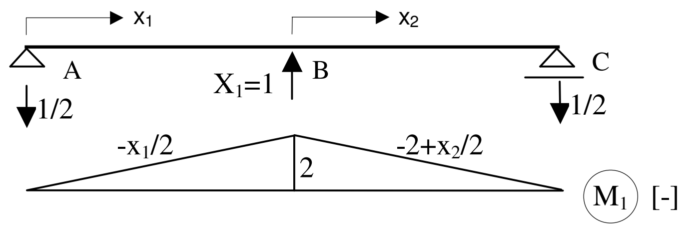
SSN=1

URK:

$\delta_{11} LwX_1 + \delta_{1P}(x) = 0$

$$\boxed{LwR_B = LwX_1}$$

Stan X_1=1



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot \frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2\right) = \frac{32}{3EI} \qquad \left[\frac{m}{kNm^2}\right]$$

$\delta_{1P}(x) = \delta_{P1}(x)$ - zgodnie z twierdzeniem Maxwella; interpretacja j/w;

<u><A;B></u>

$$M(x) = -\frac{x_1}{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_1}{2}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{x_1^{\,2}}{4} + C$$

war. brzegowe:

1) ze względu na symetrię obciążenia i geometrii układu* obrót przekroju w p.B wynosi 0:

$$x_1 = 4 \;\rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow 0 = \frac{4^2}{4} + C \;\Rightarrow C = -4$$

$$\delta_{P1}^{AB}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{x_1^{\,2}}{4} - 4\right)$$

<u><B;C></u>

$$M(x) = -2 + \frac{x_2}{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{x_2}{2}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = 2x_2 - \frac{x_2^{\,2}}{4} + C$$

war. brzegowe:

1) $x_2 = 0 \;\rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow C = 0$

$$\delta_{P1}^{BC}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(2x_2 - \frac{x_2^{\,2}}{4}\right)$$

$$LwR_B^{AB} = LwX_1^{AB} = -\frac{\delta_{1P}^{AB}(x)}{\delta_{11}} = -\frac{3EI}{32}\cdot\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1^{\,2}}{4} - 4\right) = -\frac{3x_1^{\,2}}{128} + \frac{3}{8}$$

$$LwR_B^{BC} = LwX_1^{BC} = -\frac{\delta_{1P}^{BC}(x)}{\delta_{11}} = -\frac{3EI}{32}\cdot\frac{1}{EI}\left(2x_2 - \frac{x_2^{\,2}}{4}\right) = \frac{3x_2^{\,2}}{128} - \frac{3x_2}{16}$$

(czyli j/w :)

*) w przypadku układu niesymetrycznego (różne przekroje lub rozpiętości) aby wyznaczyć funkcje kątów obrotu belki (a właściwie stałe całkowania), trzeba skorzystać z warunków brzegowych opisujących przemieszczenie pionowe (ugięcie) w punktach A, B, C:

<A;B>

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{x_1^{\,2}}{4}+C_1$$

$$EIy=\frac{x_1^{\,3}}{12}+C_1x_1+D_1$$

<B;C>

$$EI\frac{dy}{dx}=2x_2-\frac{x_2^{\,2}}{4}+C_2$$

$$EIy=x_2^2-\frac{x_2^{\,3}}{12}+C_2x_2+D_2$$

komplet warunków brzegowych:

1) $x_1=0 \;\rightarrow y=0 \;\Rightarrow\; D_1=0$

2) $x_1=4 \;\; (x_2=0) \quad \rightarrow y_B^L=y_B^P \;\Rightarrow\; \frac{4^3}{12}+4C_1+D_1=0^2-\frac{0^{\,3}}{12}+C_2\cdot 0+D_2 \;\Rightarrow\; \frac{4^3}{12}+4C_1=D_2$

3) $x_1=4 \;\; (x_2=0) \quad \rightarrow \varphi_B^L=\varphi_B^P \;\Rightarrow\; \frac{4_1^{\,2}}{4}+C_1=2\cdot 0-\frac{0^{\,2}}{4}+C_2 \;\Rightarrow\; \frac{4_1^{\,2}}{4}+C_1=C_2$

4) $x_2=4 \;\rightarrow y=0 \;\Rightarrow\; 4^2-\frac{4^{\,3}}{12}+C_2\cdot 4+D_2=0$

- po rozwiązaniu kładu równań:

$$\begin{cases} D_1=0 \\ \frac{4^3}{12}+4C_1=D_2 \\ \frac{4_1^{\,2}}{4}+C_1=C_2 \\ 4^2-\frac{4^{\,3}}{12}+C_2\cdot 4+D_2=0 \end{cases}$$

otrzymujemy: $C_1=-4;\; D_1=0;\; C_2=0;\; D_2=-32/3$, co prowadzi do tych samych wyników :)