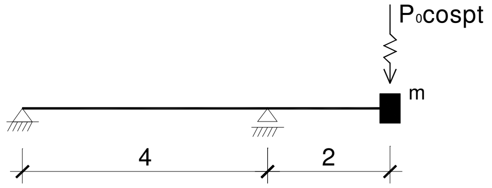
Wyznaczyć częstości drgań własnych oraz amplitudy drgań wymuszonych dla następującej belki:

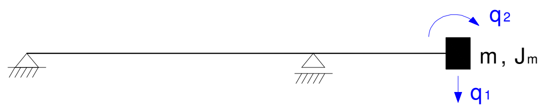


Dane:

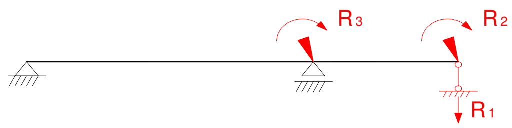
EI=10^7 Nm^2
m = 500 kg
P_0 = 18000 N
p = 30 Hz = 30·2π = 188,496 rad/s

1. Sformułowanie przez współczynniki macierzy sztywności.

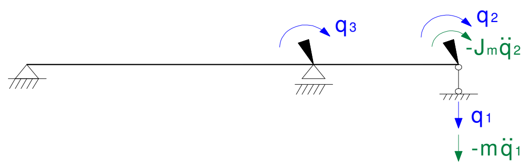
a) drgania własne



Stopień swobody dynamicznej **SSD = 2**



Układ podstawowy metody przemieszczeń.
Stopień geometrycznej niewyznaczalności (blokujemy również wszystkie stopnie swobody dynamicznej):
SGN = 3



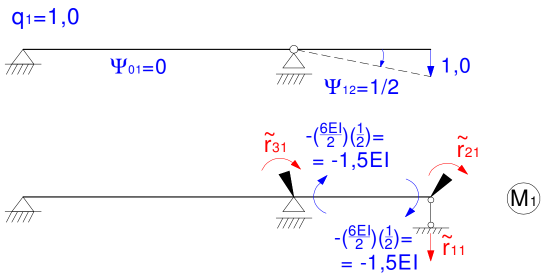
Obciążenie:

- „osiadania" dodanych więzów: q_1, q_2, q_3
- siły bezwładności: $B_1=-m\ddot{q}_1$ $B_2=-J_m\ddot{q}_2$ (siły bezwładności są siłami węzłowymi ⇒ w dynamice układów dyskretnych brak obciążenia przęsłowego)

Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń:

$$\begin{cases} R_1=0 \\ R_2=0 \\ R_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{r}_{11}q_1+\tilde{r}_{12}q_2+\tilde{r}_{13}q_3+R_{1P}=0 \\ \tilde{r}_{21}q_1+\tilde{r}_{22}q_2+\tilde{r}_{23}q_3+R_{2P}=0 \\ \tilde{r}_{31}q_1+\tilde{r}_{32}q_2+\tilde{r}_{33}q_3+R_{3P}=0 \end{cases}$$

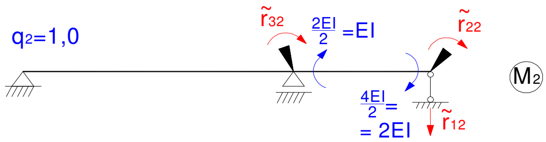
Wyznaczenie współczynników $\tilde{r}_{ik}$; R_{iP} :



$$\tilde{r}_{11}\cdot\bar{1}-2\cdot(-1{,}5EI)\cdot\overline{\frac{1}{2}}=0 \quad\to\quad \tilde{r}_{11}=1{,}5EI$$

$$\tilde{r}_{21}=-1{,}5EI$$

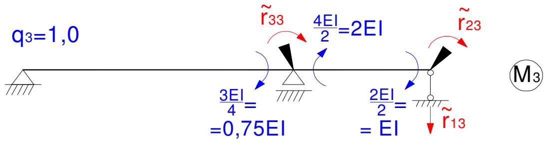
$$\tilde{r}_{31}=-1{,}5EI$$



$$\tilde{r}_{12}\cdot\bar{1}+(EI+2EI)\cdot\overline{\frac{1}{2}}=0 \quad\to\quad \tilde{r}_{12}=-1{,}5EI$$

$$\tilde{r}_{22}=2EI$$

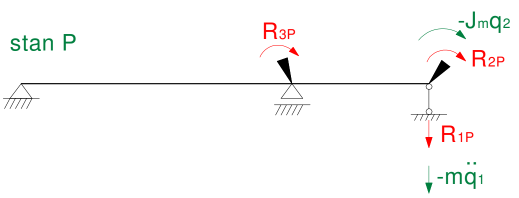
$$\tilde{r}_{32}=EI$$



$$\tilde{r}_{13}\cdot\bar{1}+(2EI+EI)\cdot\overline{\frac{1}{2}}=0 \quad\to\quad \tilde{r}_{13}=-1{,}5EI$$

$$\tilde{r}_{23}=EI$$

$$\tilde{r}_{33}=0{,}75EI+2EI=2{,}75EI$$



$$R_{1P}\cdot\bar{1}-m\ddot{q}_1\cdot\bar{1}=0 \quad\to\quad R_{1P}=m\ddot{q}_1$$

$$R_{2P}=I_m\ddot{q}_2$$

$$R_{3P}=0$$

Ponieważ $R_{3P}=0$, z trzeciego równania:

$$q_3=-\left(\frac{\tilde{r}_{31}q_1+\tilde{r}_{32}q_2}{\tilde{r}_{33}}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

stąd:

$$\begin{cases}\tilde{r}_{11}q_1+\tilde{r}_{12}q_2-\tilde{r}_{13}\left(\dfrac{\tilde{r}_{31}q_1+\tilde{r}_{32}q_2}{\tilde{r}_{33}}\right)+R_{1P}=0\\ \tilde{r}_{21}q_1+\tilde{r}_{22}q_2-\tilde{r}_{23}\left(\dfrac{\tilde{r}_{31}q_1+\tilde{r}_{32}q_2}{\tilde{r}_{33}}\right)+R_{2P}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\tilde{r}_{11}-\dfrac{\tilde{r}_{13}}{\tilde{r}_{33}}\cdot\tilde{r}_{31}\right)q_1+\left(\tilde{r}_{12}-\dfrac{\tilde{r}_{13}}{\tilde{r}_{33}}\cdot\tilde{r}_{32}\right)q_2+R_{1P}=0\\ \left(\tilde{r}_{21}-\dfrac{\tilde{r}_{23}}{\tilde{r}_{33}}\cdot\tilde{r}_{31}\right)q_1+\left(\tilde{r}_{22}-\dfrac{\tilde{r}_{23}}{\tilde{r}_{33}}\cdot\tilde{r}_{32}\right)q_2+R_{2P}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}k_{11}q_1+k_{12}q_2+R_{1P}=0\\ k_{21}q_1+k_{22}q_2+R_{2P}=0\end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\begin{cases}k_{11}q_1+k_{12}q_2+m\ddot{q}_1=0\\ k_{21}q_1+k_{22}q_2+I_m\ddot{q}_2=0\end{cases}$$

gdzie:

$$k_{11}=\tilde{r}_{11}-\frac{\tilde{r}_{13}}{\tilde{r}_{33}}\cdot\tilde{r}_{31};\qquad k_{12}=k_{21}=\tilde{r}_{12}-\frac{\tilde{r}_{13}}{\tilde{r}_{33}}\cdot\tilde{r}_{32};\qquad k_{22}=\tilde{r}_{22}-\frac{\tilde{r}_{23}}{\tilde{r}_{33}}\cdot\tilde{r}_{32}$$

Podstawiając:

$$q_i=A_i\cos\omega t$$
$$\ddot{q}_i=-A_i\omega^2\cos\omega t$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases}k_{11}A_1\cos\omega t+k_{12}A_2\cos\omega t-mA_1\omega^2\cos\omega t=0\\ k_{21}A_1\cos\omega t+k_{22}A_2\cos\omega t-I_mA_2\omega^2\cos\omega t=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_1\cos\omega t\left(k_{11}-m\omega^2\right)+k_{12}A_2\cos\omega t=0\\ k_{21}A_1\cos\omega t+A_2\cos\omega t\left(k_{22}-I_m\omega^2\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_1\left(k_{11}-m\omega^2\right)+k_{12}A_2=0\\ k_{21}A_1+A_2\left(k_{22}-I_m\omega^2\right)=0\end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

Nietrywialne rozwiązanie powyższego równania:

$$\det\begin{bmatrix}k_{11}-m\omega^2 & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}-I_m\omega^2\end{bmatrix}=0$$

$$k_{11}=1{,}5EI-\frac{(-1{,}5EI)^2}{2{,}75EI}=0{,}6818EI$$

$$k_{12}=k_{21}=-1{,}5EI-\frac{EI}{2{,}75EI}\cdot(-1{,}5EI)=-0{,}9545EI$$

$$k_{22}=2EI-\frac{EI}{2{,}75EI}\cdot EI=1{,}6364EI$$

$$\det\begin{bmatrix}0{,}6818\cdot EI-m\omega^2 & -0{,}9545\cdot EI\\ -0{,}9545\cdot EI & 1{,}6364\cdot EI-\frac{1}{12}m\omega^2\end{bmatrix}=0$$

podstawiając $\lambda=\dfrac{m\omega^2}{EI}$:

$$\det\begin{bmatrix}0{,}6818-\lambda & -0{,}9545\\ -0{,}9545 & 1{,}6364-\frac{1}{12}\lambda\end{bmatrix}=0$$

Równania ruchu w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{Kq}+\mathbf{M\ddot{q}}=\mathbf{0}$$

gdzie:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix};\quad \mathbf{\ddot{q}}=\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}$$

podstawiając:

$$\mathbf{q}=\mathbf{A}\cos\omega t$$
$$\mathbf{\ddot{q}}=-\mathbf{A}\omega^2\cos\omega t$$
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}$$

otrzymujemy:

$$\mathbf{KA}-\mathbf{MA}\omega^2=\mathbf{0}$$
$$\left(\mathbf{K}-\mathbf{M}\omega^2\right)\mathbf{A}=\mathbf{0}$$

rozwiązanie nietrywialne:

$$\det\left(\mathbf{K}-\mathbf{M}\omega^2\right)=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad\omega_i$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}0{,}6818 & -0{,}9545\\ -0{,}9545 & 1{,}6364\end{bmatrix}EI$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}\end{bmatrix}m$$

Równanie charakterystyczne:

$$\frac{1}{12}\lambda^2-(1{,}6932)\lambda+(0{,}2045)=0$$

Wartości własne i częstości drgań własnych:

$$\lambda_1=0{,}1215 \quad\Rightarrow\quad \omega_1=\sqrt{\frac{\lambda_1 EI}{m}}=\mathbf{49{,}30}\frac{rad}{s}$$

$$\lambda_2=20{,}1969 \quad\Rightarrow\quad \omega_2=\sqrt{\frac{\lambda_2 EI}{m}}=\mathbf{635{,}56}\frac{rad}{s}$$

Postacie drgań własnych.

I postać drgań własnych:

- podstawiając $\omega_1=49{,}30\frac{rad}{s}$ oraz $A_1=1{,}0$ do pierwszego lub drugiego równania układu równań **(3)** otrzymujemy: $A_2=0{,}587$
- zgodnie z zależnością (**1**):

$$q_3=-\left(\frac{\tilde{r}_{31}q_1+\tilde{r}_{32}q_2}{\tilde{r}_{33}}\right) \quad\Rightarrow\quad A_3=-\left(\frac{\tilde{r}_{31}A_1+\tilde{r}_{32}A_2}{\tilde{r}_{33}}\right)=-\left(\frac{-1{,}5EI\cdot 1{,}0+EI\cdot 0{,}5870}{2{,}75EI}\right)=0{,}3320$$

II postać drgań własnych:

- podstawiając $\omega_2=635{,}56\frac{rad}{s}$ oraz $A_1=1{,}0$ do pierwszego lub drugiego równania układu równań **(3)** otrzymujemy: $A_2=-20{,}444$
- normujemy tak, żeby $A_{max}=1{,}0$ (w tym przypadku dzieląc przez A_2):

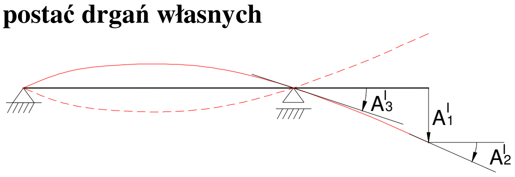
$$A_2=1{,}0;\quad A_1=\frac{1}{-20{,}444}=-0{,}049$$

- zgodnie z zależnością (**1**):

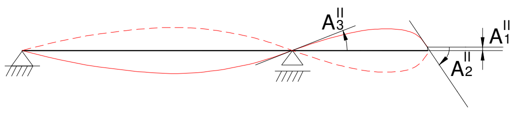
$$q_3=-\left(\frac{\tilde{r}_{31}q_1+\tilde{r}_{32}q_2}{\tilde{r}_{33}}\right) \quad\Rightarrow\quad A_3=-\left(\frac{\tilde{r}_{31}A_1+\tilde{r}_{32}A_2}{\tilde{r}_{33}}\right)=-\left(\frac{(-1{,}5EI)\cdot(-0{,}0489)+EI\cdot 1{,}0}{2{,}75EI}\right)=-0{,}3903$$

postać	ω [rad/s]	A_1	A_2	A_3
I	49,30	1,0000	0,5870	0,3320
II	635,56	-0,0489	1,0000	-0,3903

I postać drgań własnych



II postać drgań własnych



Sprawdzenie ortogonalności postaci drgań:

$$A_1^I\cdot A_1^{II}\cdot m+A_2^I\cdot A_2^{II}\cdot I_m=0$$

$$1{,}0\cdot(-0{,}0489)\cdot 500+0{,}5870\cdot 1{,}0\cdot\frac{500}{12}=0{,}0083\approx 0$$

w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{A}^{I^T}\mathbf{M}\mathbf{A}^{II}=0$$

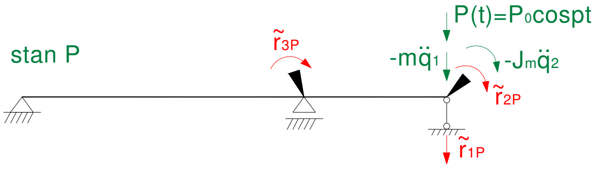
gdzie:

$$\mathbf{A}^I=\begin{bmatrix}A_1^I\\A_2^I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}0000\\-0{,}0489\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{II}=\begin{bmatrix}A_1^{II}\\A_2^{II}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}5870\\1{,}0000\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}m & 0\\0 & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{12}\end{bmatrix}m$$

b) drgania wymuszone:



Obciążenie:

- „osiadania" dodanych więzów: q_1, q_2, q_3
- siły bezwładności: $B_1=-m\ddot{q}_1$ $\quad B_2=-J_m\ddot{q}_2$
- siła wymuszająca $P(t)$

Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń:

$$\begin{cases} R_1=0 \\ R_2=0 \\ R_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{r}_{11}q_1+\tilde{r}_{12}q_2+\tilde{r}_{13}q_3+R_{1P}=0 \\ \tilde{r}_{21}q_1+\tilde{r}_{22}q_2+\tilde{r}_{23}q_3+R_{2P}=0 \\ \tilde{r}_{31}q_1+\tilde{r}_{32}q_2+\tilde{r}_{33}q_3+R_{3P}=0 \end{cases}$$

Współczynniki R_{iP}:

$$R_{1P}\cdot\bar{1}-m\ddot{q}_1\cdot\bar{1}+P_0\cos pt\cdot\bar{1}=0 \quad\rightarrow\quad R_{1P}=m\ddot{q}_1-P_0\cos pt$$

$$R_{2P}=I_m\ddot{q}_2=\frac{1}{12}m\ddot{q}_2$$

$$R_{3P}=0$$

Podobnie jak w analizie drgań własnych, z trzeciego równania wyznaczamy q_3 i po podstawieniu **(1)** do pozostałych równań równowagi otrzymujemy układ równań **(2)**:

$$\begin{cases} k_{11}q_1+k_{12}q_2+R_{1P}=0 \\ k_{21}q_1+k_{22}q_2+R_{2P}=0 \end{cases}$$

stąd różniczkowe równania ruchu:

$$\begin{cases} k_{11}q_1+k_{12}q_2+m\ddot{q}_1=P_0\cos pt \\ k_{21}q_1+k_{22}q_2+\frac{1}{12}m\ddot{q}_2=0 \end{cases}$$

Podstawiając:

$$q_i=A_i\cos pt$$

$$\ddot{q}_i=-A_ip^2\cos pt$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} k_{11}A_1\cos pt+k_{12}A_2\cos pt-mA_1p^2\cos pt=P_0\cos pt \\ k_{21}A_1\cos pt+k_{22}A_2\cos pt-\frac{1}{12}mA_2p^2\cos pt=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{11}A_1+k_{12}A_2-mA_1p^2=P_0 \\ k_{21}A_1+k_{22}A_2-\frac{1}{12}mA_2p^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k_{11}-mp^2)A_1+k_{12}A_2=P_0 \\ k_{21}A_1+\left(k_{22}-\frac{1}{12}mp^2\right)A_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1{,}0947\cdot10^7A_1-0{,}9545\cdot10^7A_2=18000 \\ -0{,}9545\cdot10^7A_1+1{,}4883\cdot10^7A_2=0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy amplitudy drgań wymuszonych:

$$\begin{cases} A_1=\mathbf{-0{,}001054\,m} \\ A_2=\mathbf{-0{,}000676\,rad} \end{cases}$$

Równania ruchu w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{Kq}+\mathbf{M\ddot{q}}=\mathbf{P}$$

gdzie:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix};\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix} P(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix};\quad \mathbf{\ddot{q}}=\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

podstawiając:

$$\mathbf{q}=\mathbf{A}\cos pt$$

$$\mathbf{\ddot{q}}=-\mathbf{A}p^2\cos pt$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

otrzymujemy:

$$\mathbf{KA}-\mathbf{MA}p^2=\mathbf{P_0}$$

$$\mathbf{P_0}=\begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}-\mathbf{M}p^2)\mathbf{A}=\mathbf{P_0}$$

Stąd:

$$\mathbf{A}=(\mathbf{K}-\mathbf{M}p^2)^{-1}\mathbf{P_0}$$

Zgodnie z równaniem **(1)**:

$$q_3=-\left(\frac{\tilde{r}_{31}q_1+\tilde{r}_{32}q_2}{\tilde{r}_{33}}\right) \Rightarrow A_3=-\left(\frac{\tilde{r}_{31}A_1+\tilde{r}_{32}A_2}{\tilde{r}_{33}}\right)=-\left(\frac{(-1{,}5EI)(-0{,}001054)+EI\cdot(-0{,}000676)}{2{,}75EI}\right)=\mathbf{-0{,}000329\,rad}$$

Obliczenie wartości sił bezwładności działających na układ:

$$B_1 = -m \cdot \ddot{q}_1 = m \cdot A_1 \cdot p^2 \cos pt$$

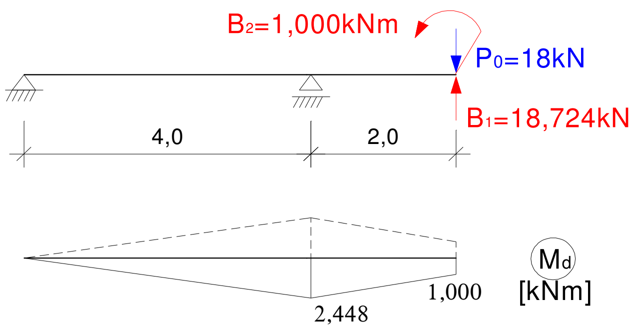
$$B_2 = -\frac{1}{12} m \cdot \ddot{q}_2 = \frac{1}{12} m \cdot A_2 \cdot p^2 \cos pt$$

wartości ekstremalne otrzymamy dla $\cos pt = 1$:

$$B_1 = 500 \cdot (30 \cdot 2\pi)^2 \cdot (-0{,}001054) = \text{-}18724{,}61 N$$

$$B_2 = \frac{1}{12} \cdot 500 \cdot (30 \cdot 2\pi)^2 \cdot (-0{,}000676) = \text{-}1000{,}48 Nm$$

Obwiednia momentów dynamicznych:



2. Sformułowanie przez współczynniki macierzy podatności.

a) drgania własne

Stopień swobody dynamicznej **SSD = 2**

Równanie ruchu:

$$\begin{cases} q_1 = \delta_{11}\left(-m\ddot{q}_1\right) + \delta_{12}\left(-I_m\ddot{q}_2\right) \\ q_2 = \delta_{21}\left(-m\ddot{q}_1\right) + \delta_{22}\left(-I_m\ddot{q}_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + \delta_{11} m\ddot{q}_1 + \delta_{12} I_m \ddot{q}_2 = 0 \\ q_2 + \delta_{21} m\ddot{q}_1 + \delta_{22} I_m \ddot{q}_2 = 0 \end{cases}$$

Podstawiając:

$$q_i = A_i \cos\omega t$$

$$\ddot{q}_i = -A_i \omega^2 \cos\omega t$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} A_1 \cos\omega t - \delta_{11} m A_1 \omega^2 \cos\omega t - \delta_{12} \dfrac{1}{12} m A_2 \omega^2 \cos\omega t = 0 \\ A_2 \cos\omega t - \delta_{21} m A_1 \omega^2 \cos\omega t - \delta_{22} \dfrac{1}{12} m A_2 \omega^2 \cos\omega t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1\left(1 - \delta_{11} m\omega^2\right) - A_2 \delta_{12} \dfrac{1}{12} m\omega^2 = 0 \\ -A_1 \delta_{21} m\omega^2 + A_2\left(1 - \delta_{22} \dfrac{1}{12} m\omega^2\right) = 0 \end{cases}$$

Nietrywialne rozwiązanie powyższego układu równań istnieje dla:

$$\det\begin{bmatrix} 1 - \delta_{11} m\omega^2 & -\dfrac{\delta_{12} m\omega^2}{12} \\ -\delta_{21} m\omega^2 & 1 - \dfrac{\delta_{22} m\omega^2}{12} \end{bmatrix} = 0$$

gdzie: $\delta_{ik} = \sum \int\limits_x \dfrac{M_i\, M_k}{EI} dx$

Obliczenie współczynników macierzy podatności δ_{ik} :

Równania ruchu w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{Kq} + \mathbf{M\ddot{q}} = \mathbf{0} \quad / \mathbf{K}^{-1}$$

$$\mathbf{q} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M\ddot{q}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{q} + \mathbf{DM\ddot{q}} = \mathbf{0}$$

gdzie:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\ddot{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

podstawiając:

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\cos\omega t;$$

$$\mathbf{\ddot{q}} = -\mathbf{A}\omega^2 \cos\omega t$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy:

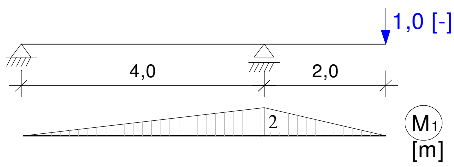
$$\mathbf{A} - \mathbf{DMA}\omega^2 = \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{DM}\omega^2\right)\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

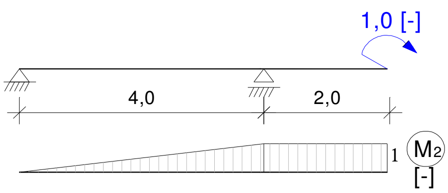
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rozwiązanie nietrywialne:

$$\det\left(\mathbf{I} - \mathbf{DM}\omega^2\right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \omega_i$$



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot \frac{2}{3}\cdot 2\right) = \frac{8}{EI}$$



$$\delta_{12} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 1\right) = \frac{14}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot \frac{2}{3}\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1\right) = \frac{10}{3EI}$$

Stąd:

$$\det\begin{bmatrix} 1 - \dfrac{8}{EI} m\omega^2 & -\dfrac{14}{3EI}\dfrac{m\omega^2}{12} \\ -\dfrac{14}{3EI} m\omega^2 & 1 - \dfrac{10}{3EI}\dfrac{m\omega^2}{12} \end{bmatrix} = 0$$

Podstawiając: $\lambda = \dfrac{m\omega^2}{EI}$

$$\det\begin{bmatrix} 1 - 8\lambda & -\dfrac{7}{18}\lambda \\ -\dfrac{14}{3}\lambda & 1 - \dfrac{5}{18}\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 8 & \dfrac{14}{3} \\ \dfrac{14}{3} & \dfrac{10}{3} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EI}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{12} \end{bmatrix} m$$

Równanie charakterystyczne:

$$0{,}4074\lambda^2 - 8{,}2778\lambda + 1 = 0$$

Wartości własne i częstości drgań własnych:

$$\lambda_1 = 0{,}1215 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 EI}{m}} = \mathbf{49{,}30}\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}$$

$$\lambda_2 = 20{,}1966 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2 EI}{m}} = \mathbf{635{,}56}\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}$$

Wyznaczone częstości drgań własnych są oczywiście identyczne jak w p.1a).
Postacie drgań własnych są również takie same – z tym, że w tym przypadku nie wyznaczymy kąta obrotu nad podporą (A_3)

b) drgania wymuszone

Różniczkowe równania ruchu:

$$\begin{cases} q_1 = \delta_{11}\left(-m\ddot{q}_1 + P(t)\right) + \delta_{12}\left(-I_m \ddot{q}_2\right) \\ q_2 = \delta_{21}\left(-m\ddot{q}_1 + P(t)\right) + \delta_{22}\left(-I_m \ddot{q}_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + \delta_{11} m\ddot{q}_1 + \delta_{12} I_m \ddot{q}_2 = \delta_{11} P(t) \\ q_2 + \delta_{21} m\ddot{q}_1 + \delta_{22} I_m \ddot{q}_2 = \delta_{21} P(t) \end{cases}$$

Podstawiając:

$$q_i = A_i \cos pt$$

$$\ddot{q}_i = -A_i p^2 \cos pt$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} A_1 \cos pt - \delta_{11} m A_1 p^2 \cos pt - \delta_{12} \frac{1}{12} m A_2 p^2 \cos pt = \delta_{11} P_0 \cos pt \\ A_2 \cos pt - \delta_{21} m A_1 p^2 \cos pt - \delta_{22} \frac{1}{12} m A_2 p^2 \cos pt = \delta_{21} P_0 \cos pt \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1\left(1 - \delta_{11} m p^2\right) - A_2 \delta_{12} \frac{1}{12} m p^2 = \delta_{11} P_0 \\ -A_1 \delta_{21} m p^2 + A_2\left(1 - \delta_{22} \frac{1}{12} m p^2\right) = \delta_{21} P_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -13{,}2122 A_1 - 0{,}6909 A_2 = 0{,}0144 \\ -8{,}2905 A_1 + 0{,}5065 A_2 = 0{,}0084 \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań są amplitudy drgań wymuszonych:

$$\begin{cases} A_1 = \mathbf{-0{,}001054\,m} \\ A_2 = \mathbf{-0{,}000676\,rad} \end{cases}$$

Również w tym przypadku możemy wyznaczyć tylko amplitudy drgań po kierunku przemieszczeń q_1 i q_2, nie znamy wartości kąta obrotu nad podporą q_3 .

Równania ruchu w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{Kq} + \mathbf{M\ddot{q}} = \mathbf{P} \quad / \mathbf{K}^{-1}$$

$$\mathbf{q} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M\ddot{q}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{q} + \mathbf{DM\ddot{q}} = \mathbf{DP}$$

gdzie:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\ddot{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

podstawiając:

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\cos pt$$

$$\mathbf{\ddot{q}} = -\mathbf{A}p^2 \cos pt$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy:

$$\mathbf{A} - \mathbf{DMA}p^2 = \mathbf{DP_0}$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{DM}p^2\right)\mathbf{A} = \mathbf{DP_0}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P_0} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{DM}p^2\right)^{-1}\mathbf{DP_0}$$

Ekstremalne siły bezwładności działające na układ i obwiednia momentów dynamicznych jak wyżej.