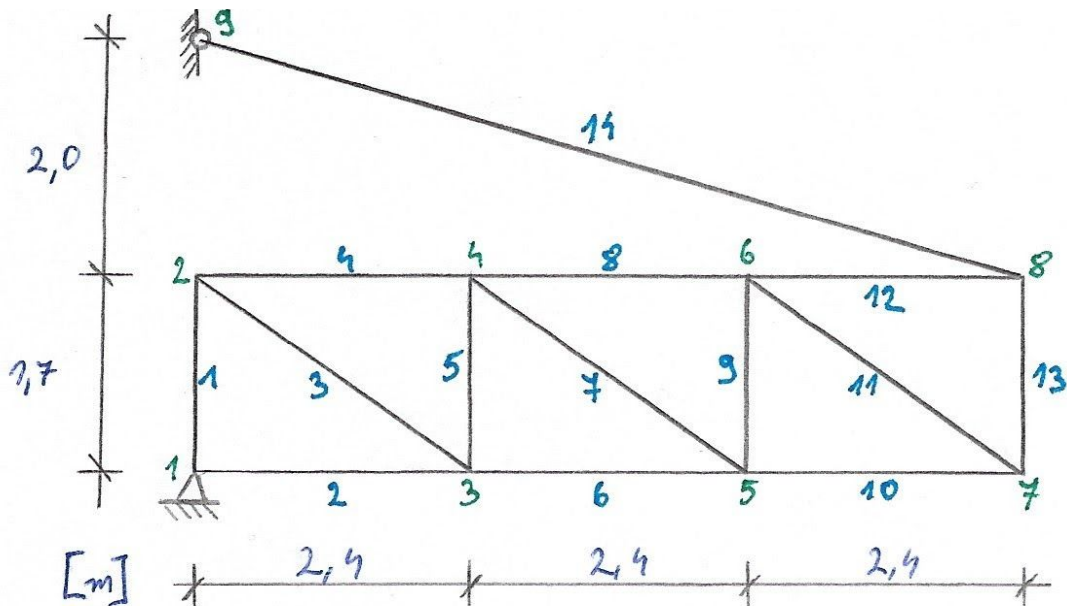


ĆWICZENIE NR 4 WYZNACZANIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH - KRATOWNICE

Część 1

1. Schemat układu



2. Analiza geometrycznej niezmienności układu

a) warunek konieczny:

$$p + r = 2w$$

liczba węzłów: $w = 9$

liczba prętów: $p = 14$

liczba reakcji podpór: $r = 4$

$$14 + 4 = 2 \times 9$$

$$18 = 18$$

Warunek konieczny geometrycznej niezmienności jest spełniony

b) warunek dostateczny

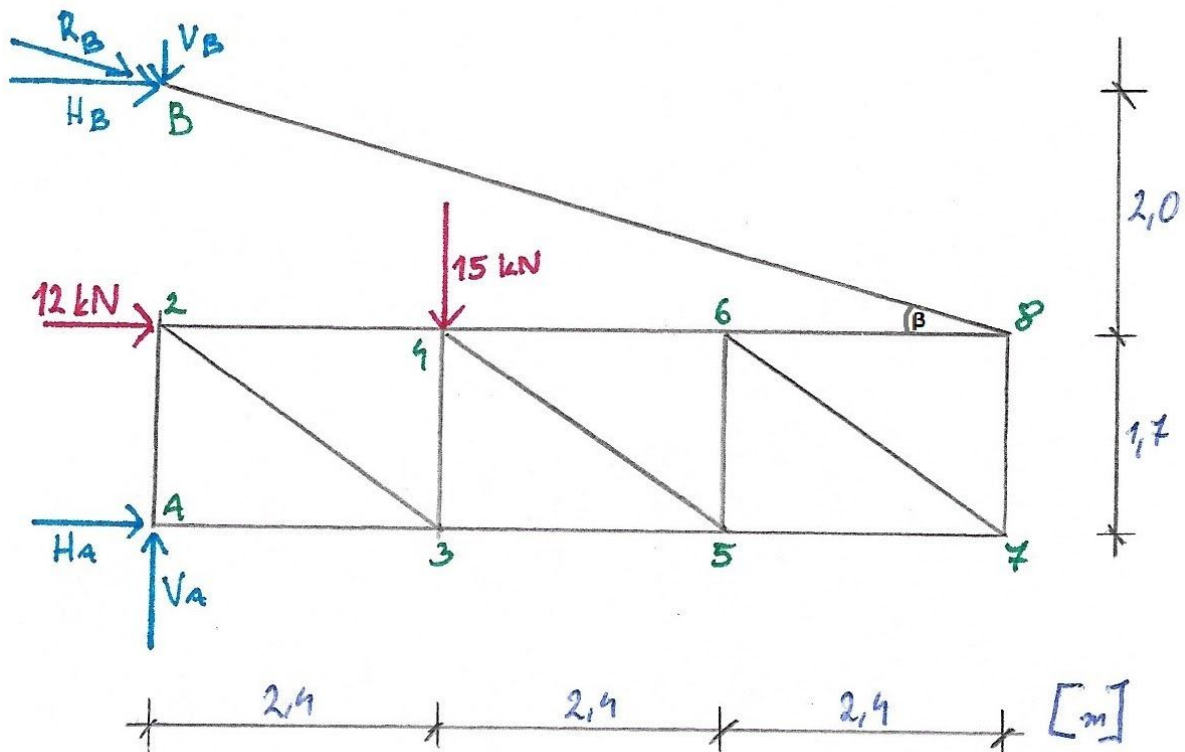
Kratownica składa się z 14 prętów, które w analizie geometrycznej niezmienności traktujemy jak tarcze sztywne. Pręty 1-13 tworzą tarczę zastępczą: pręty 1, 2 i 3 tworzą układ trójprzegubowy, przeguby 1, 2 i 3 nie leżą na jednej prostej, a więc tarcze są względem siebie geometrycznie niezmiennie i tworzą tarczę zastępczą I. Tarcza zastępcza I tworzy z prętami/tarczami 4 i 5 układ trójprzegubowy z przegubami 2, 3 i 4, które nie leżą na jednej prostej. Powstaje tarcza zastępcza II. Postępując analogicznie tworzymy kolejne tarcze zastępcze, w wyniku czego powstaje jedna duża tarcza zastępcza stworzona z prętów 1-13.

Tarcza zastępcza oraz pręt 14 tworzą układ trójprzegubowy z przegubami 1, 8 i 9. Przeguby te nie leżą na jednej prostej.

Warunek dostateczny geometrycznej niezmienności jest spełniony

Układ jest geometrycznie niezmienny

3. Wyznaczenie reakcji więzów



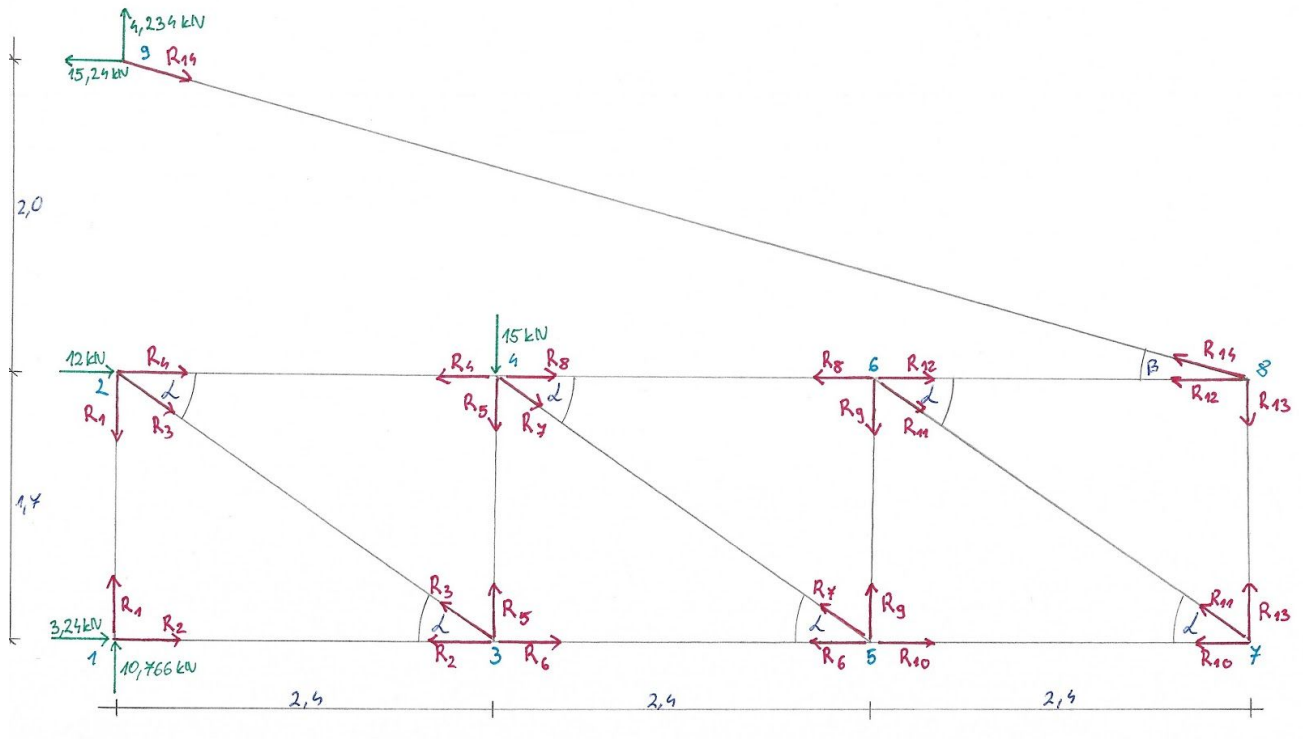
$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ 12 \times 1,7 + H_B \times 3,7 + 15 \times 2,4 &= 0 \\ H_B &= -15,24 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0 \\ -15,24 + H_A - 12 &= 0 \\ H_A &= 3,24 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_B &= H_B \times \operatorname{tg} \beta \\ \operatorname{tg} \beta &= 0,2778 \\ V_B &= -15,24 \times 0,2778 \\ V_B &= -4,234 \text{ kN} \end{aligned}$$

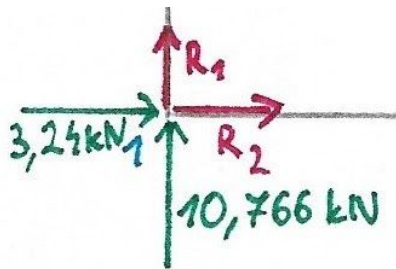
$$\begin{aligned} \sum P_y &= 0 \\ V_B + 15 - V_A &= 0 \\ -4,234 + 15 - V_A &= 0 \\ V_A &= 10,766 \text{ kN} \end{aligned}$$

4. Wyznaczanie sił w prętach (metodą równoważenia węzłów)



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 0,5780 & \cos \alpha &= 0,8160 \\ \sin \beta &= 0,2676 & \cos \beta &= 0,9635 \end{aligned}$$

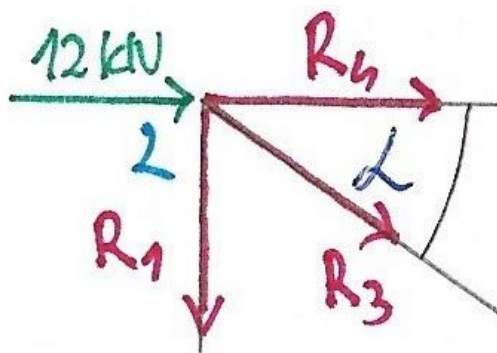
a) węzeł 1



$$\begin{aligned} \sum P_y &= 0 \\ R_1 &= -10,766 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0 \\ R_2 &= -3,24 \text{ kN} \end{aligned}$$

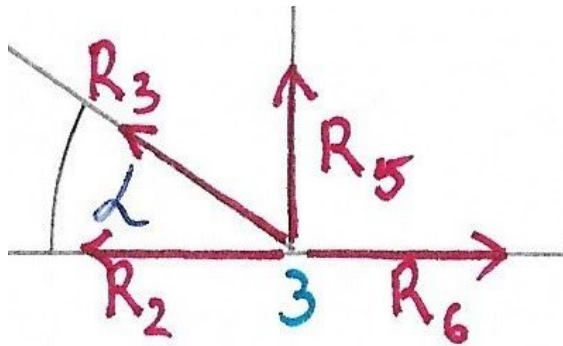
b) węzeł 2



$$\begin{aligned} \sum P_y &= 0 \\ R_1 + R_3 \times \sin \alpha &= 0 \\ -10,766 + R_3 \times 0,5780 &= 0 \\ R_3 &= 18,626 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0 \\ 12 + R_4 + R_3 \times \cos \alpha &= 0 \\ 12 + R_4 + 18,626 \times 0,8160 &= 0 \\ R_4 &= -27,199 \text{ kN} \end{aligned}$$

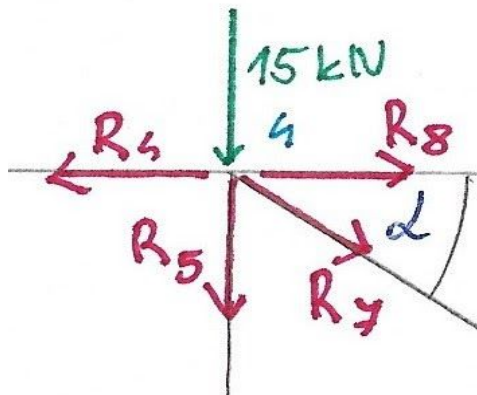
c) węzeł 3



$$\begin{aligned} \sum P_y &= 0 \\ -R_3 \times \sin \alpha - R_5 &= 0 \\ -18,626 \times 0,5780 - R_5 &= 0 \\ \mathbf{R_5} &= \mathbf{-10,766 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0 \\ -R_2 - R_3 \times \cos \alpha + R_6 &= 0 \\ -(-3,24) - 18,626 \times 0,8160 + R_6 &= 0 \\ \mathbf{R_6} &= \mathbf{11,959 \text{ kN}} \end{aligned}$$

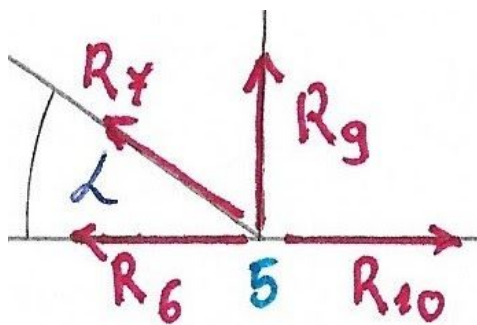
d) węzeł 4



$$\begin{aligned} \sum P_y &= 0 \\ 15 + R_5 + R_7 \times \sin \alpha &= 0 \\ 15 + (-10,766) + R_7 \times 0,5780 &= 0 \\ \mathbf{R_7} &= \mathbf{-7,325 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0 \\ -R_4 + R_8 + R_7 \times \cos \alpha &= 0 \\ -(-27,199) + R_8 + (-7,325) \times 0,8160 &= 0 \\ \mathbf{R_8} &= \mathbf{-21,222 \text{ kN}} \end{aligned}$$

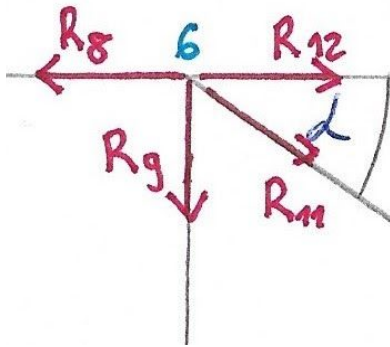
e) węzeł 5



$$\begin{aligned} \sum P_y &= 0 \\ -R_9 - R_7 \times \sin \alpha &= 0 \\ -R_9 - (-7,325) \times 0,5780 &= 0 \\ \mathbf{R_9} &= \mathbf{4,234 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0 \\ -R_6 - R_7 \times \cos \alpha + R_{10} &= 0 \\ -11,959 - (-7,325) \times 0,8160 + R_{10} &= 0 \\ \mathbf{R_{10}} &= \mathbf{5,982 \text{ kN}} \end{aligned}$$

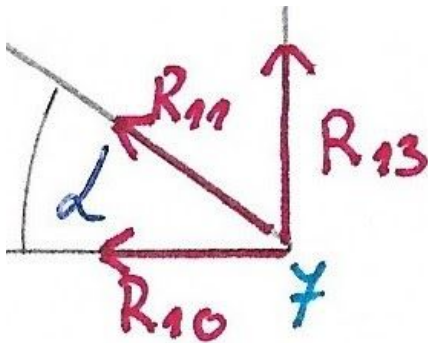
f) węzeł 6



$$\begin{aligned}\Sigma P_Y &= 0 \\ R_9 + R_{11} \times \sin\alpha &= 0 \\ 4,234 + R_{11} \times 0,5780 &= 0 \\ \mathbf{R_{11} = -7,325 \text{ kN}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma P_X &= 0 \\ -R_8 + R_{11} \times \cos\alpha + R_{12} &= 0 \\ -(21,222) + (-7,325) \times 0,8160 + R_{12} &= 0 \\ \mathbf{R_{12} = -15,245}\end{aligned}$$

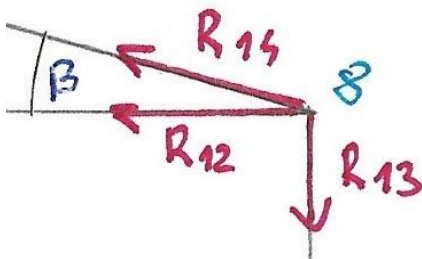
g) węzeł 7



$$\begin{aligned}\Sigma P_Y &= 0 \\ -R_{13} - R_{11} \times \sin\alpha &= 0 \\ -R_{13} - (-7,325) \times 0,5780 &= 0 \\ \mathbf{R_{13} = 4,234 \text{ kN}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma P_X &= 0 \text{ (Sprawdzenie)} \\ -R_{10} - R_{11} \times \cos\alpha &= 0 \\ -5,982 - (-7,325) \times 0,8160 &= 0 \\ \mathbf{-5,982 - (-5,9772) = -0,0048 \approx 0 \text{ kN}}\end{aligned}$$

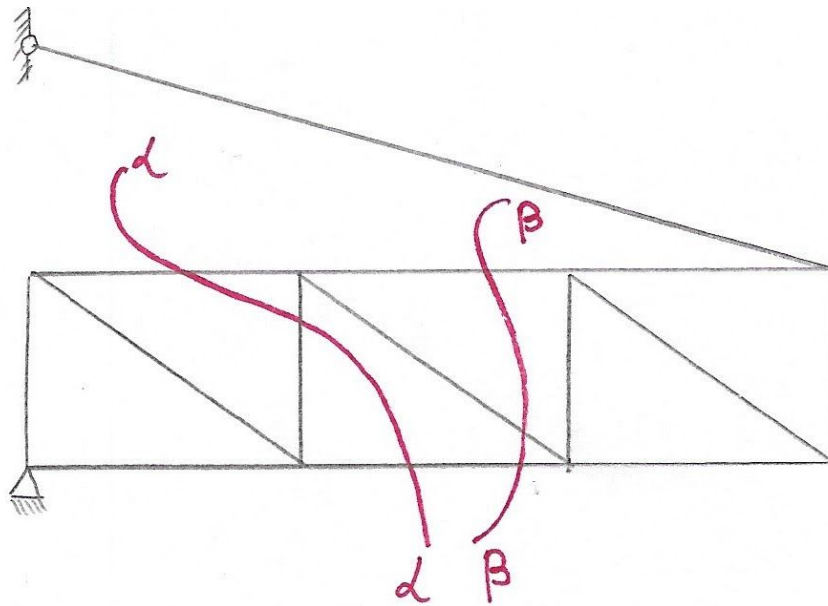
h) węzeł 8



$$\begin{aligned}\Sigma P_Y &= 0 \\ R_{13} - R_{14} \times \sin\beta &= 0 \\ 4,234 - R_{14} \times 0,2676 &= 0 \\ \mathbf{R_{14} = 15,822 \text{ kN}}\end{aligned}$$

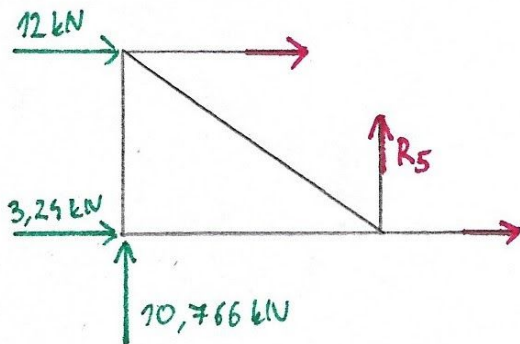
$$\begin{aligned}\Sigma P_X &= 0 \text{ (Sprawdzenie)} \\ -R_{12} - R_{14} \times \cos\beta &= 0 \\ -(15,245) - 15,822 \times 0,9635 &= 0 \\ \mathbf{15,245 - 15,244 = 0,001 \approx 0 \text{ kN}}\end{aligned}$$

5. Wyznaczanie sił we wskazanych prętach metodą Rittera



Siły wskazane do wyznaczenia: R_5 , R_7 , R_8

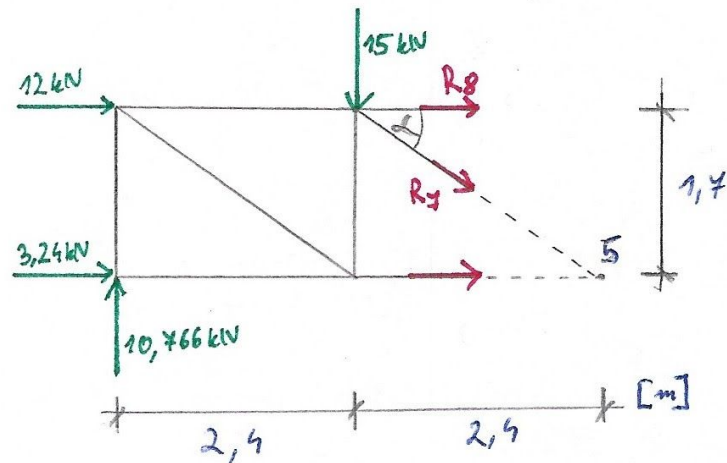
a) R_5



$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0 \\ -10,766 - R_5 &= 0 \\ R_5 &= -10,766 \text{ kN}\end{aligned}$$

Sprawdzenie z poprzednim wynikiem:
 $-10,766 - (-10,766) = 0 \text{ kN}$

b) $R_7 + R_8$



$$\sum P_y = 0$$

$$15 + R_7 \times \sin \alpha - 10,766 = 0$$

$$R_7 = -7,325 \text{ kN}$$

Sprawdzenie z poprzednim wynikiem:

$$-7,325 - (-7,325) = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_5 = 0$$

$$10,766 \times 4,8 + 12 \times 1,7 - 15 \times 2,4 + R_8 \times 1,7 = 0$$

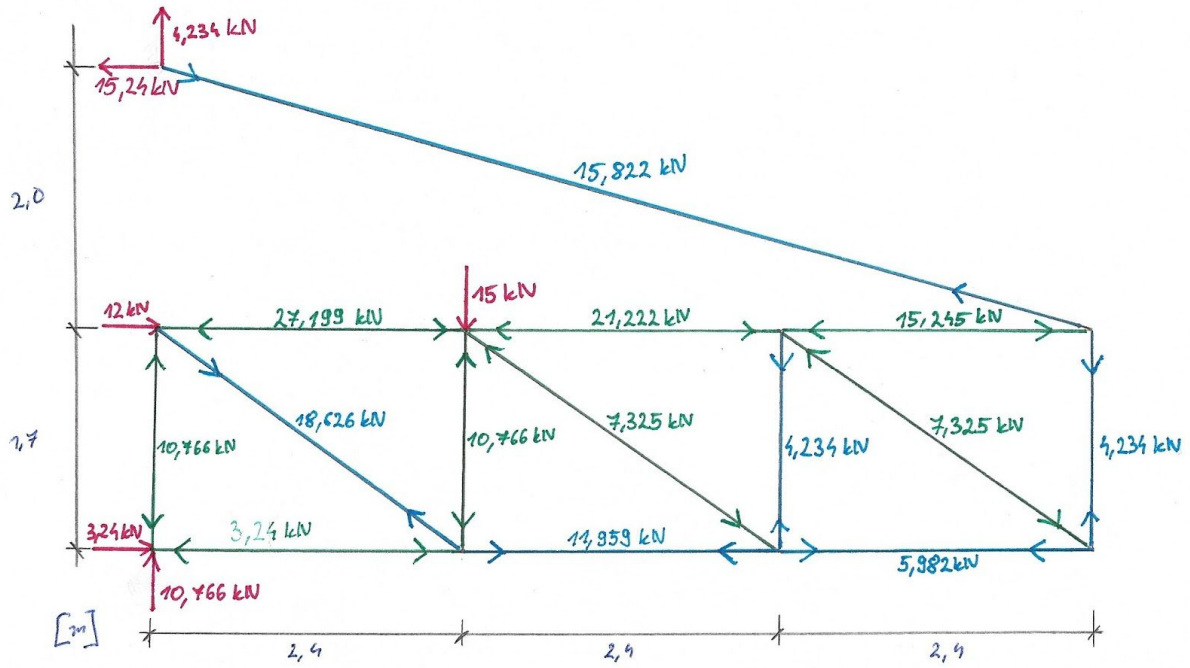
$$51,6786 + 20,4 - 36 + R_8 \times 1,7 = 0$$

$$R_8 = -21,223 \text{ kN}$$

Sprawdzenie z poprzednim wynikiem:

$$-21,222 - (-21,223) = 0,001 \approx 0 \text{ kN}$$

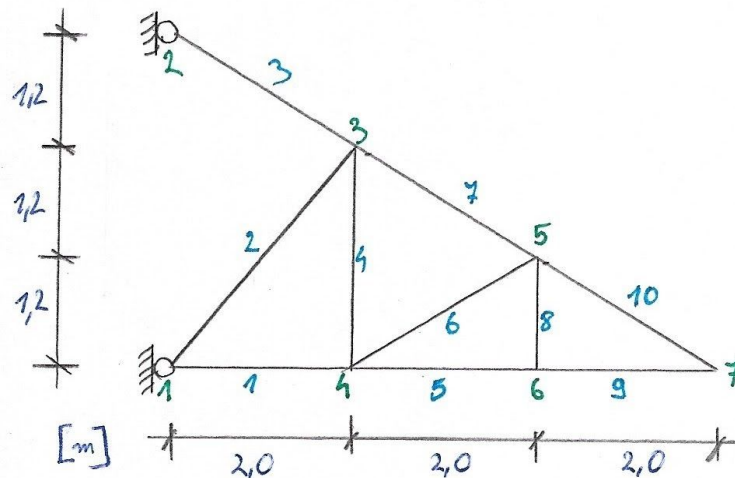
6. Zestawienie sił



Wszystkie wartości podane w kN
Kolor niebieski - pręty rozciągane
Kolor zielony - pręty ściskane

Część 2

7. Schemat układu



8. Analiza geometrycznej niezmienności układu

c) warunek konieczny:

$$p + r = 2w$$

liczba węzłów: $w = 7$

liczba prętów: $p = 10$

liczba reakcji podpór: $r = 4$

$$10 + 4 = 2 \times 7$$

$$14 = 14$$

Warunek konieczny geometrycznej niezmienności jest spełniony

d) warunek dostateczny

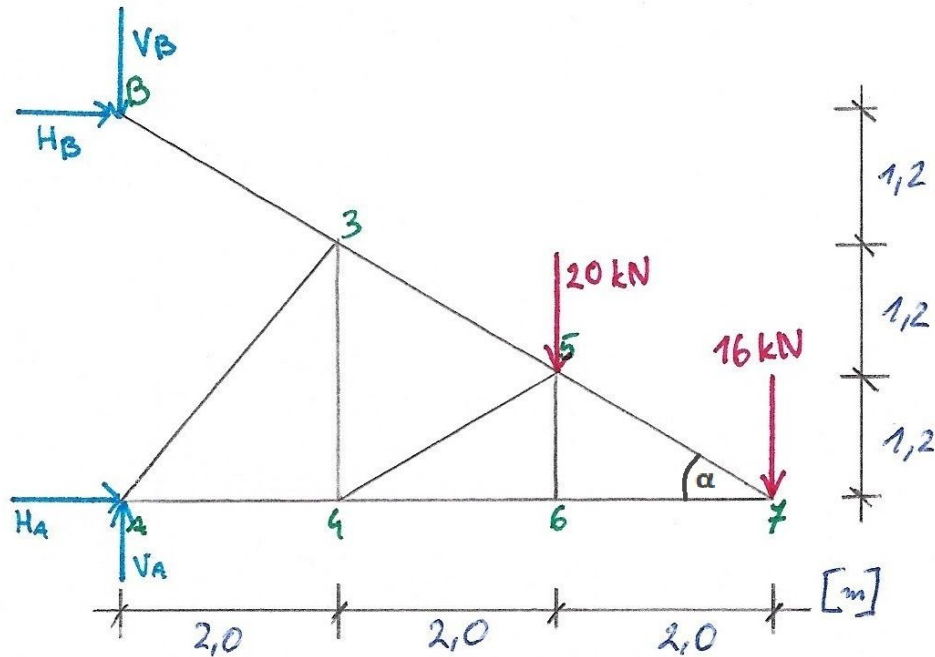
Kratownica składa się z 10 prętów, które w analizie geometrycznej niezmienności traktujemy jak tarcze sztywne. Pręty 1-2 oraz 4-10 tworzą tarczę zastępczą: pręty 1, 2 i 4 tworzą układ trójprzegubowy, przeguby 1, 3 i 4 nie leżą na jednej prostej, a więc tarcze są względem siebie geometrycznie niezmiennie i tworzą tarczę zastępczą I. Tarcza zastępcza I tworzy z prętami/tarczami 6 i 7 układ trójprzegubowy z przegubami 3, 4 i 5, które nie leżą na jednej prostej. Powstaje tarcza zastępcza II. Postępując analogicznie tworzymy kolejne tarcze zastępcze, w wyniku czego powstaje jedna duża tarcza zastępcza stworzona z prętów 1-2 oraz 4-10..

Tarcza zastępcza oraz pręt 3 tworzą układ trójprzegubowy z przegubami 1, 2 i 3. Przeguby te nie leżą na jednej prostej.

Warunek dostateczny geometrycznej niezmienności jest spełniony

Układ jest geometrycznie niezmienny

9. Wyznaczenie reakcji więzów



$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \\ H_B \times 3,6 + 20 \times 4 + 16 \times 6 &= 0 \\ H_B &= -48,889 \text{ kN}\end{aligned}$$

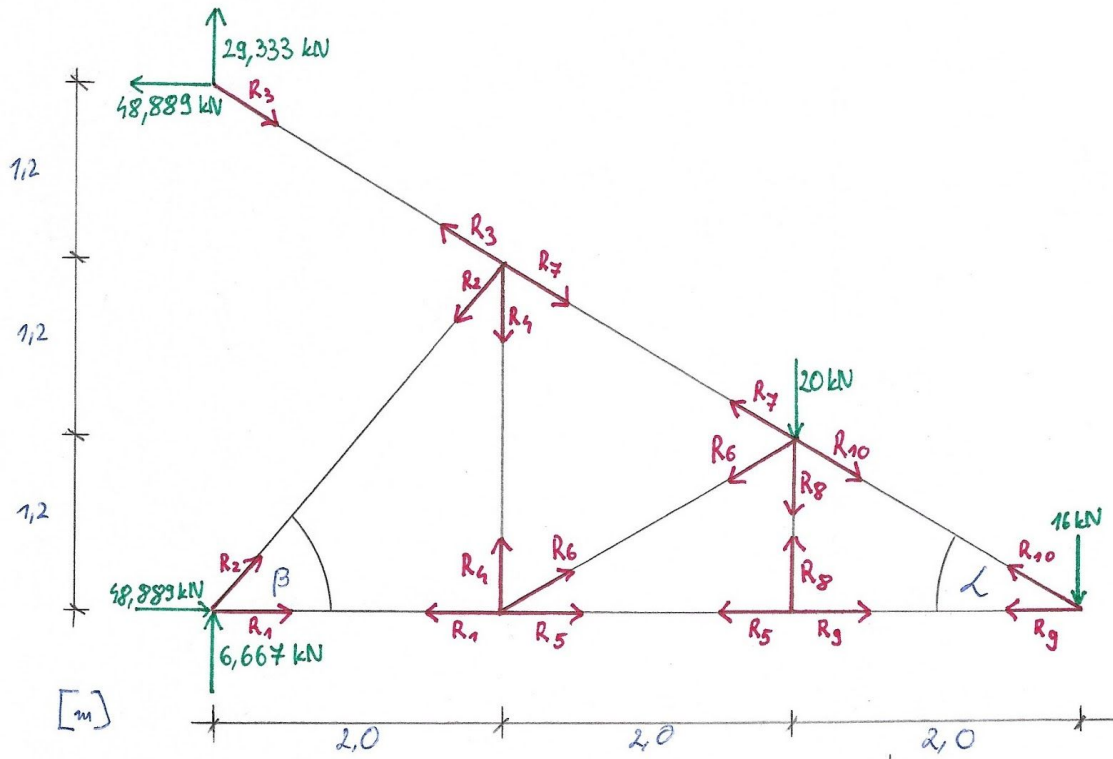
$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \\ -H_A \times 3,6 + 20 \times 4 + 16 \times 6 &= 0 \\ H_A &= 48,889 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_B &= H_B \times \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha &= 0,6 \\ V_B &= -29,333 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_Y &= 0 \\ -V_A + V_B + 20 + 16 &= 0 \\ -V_A + (-29,333) + 20 + 16 &= 0 \\ V_A &= 6,667 \text{ kN}\end{aligned}$$

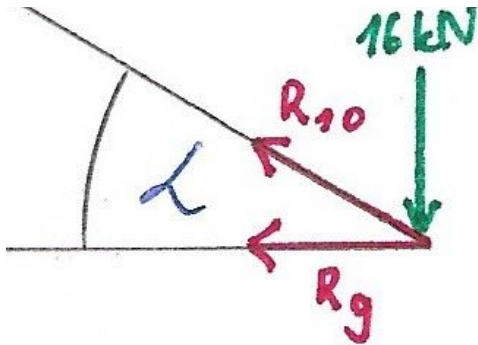
$$\begin{aligned}\sum P_X &= 0 \text{ (Sprawdzenie)} \\ H_A + H_B &= 0 \\ 48,889 + (-48,889) &= 0 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

10. Wyznaczanie sił w prętach (metodą równoważenia węzłów)



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 0,5145 & \cos \alpha &= 0,8575 \\ \sin \beta &= 0,7682 & \cos \beta &= 0,6402 \end{aligned}$$

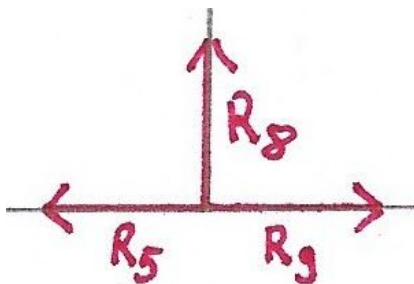
a) węzeł 1



$$\begin{aligned} \sum P_Y &= 0 \\ 16 - R_{10} \times \sin \alpha &= 0 \\ 16 - R_{10} \times 0,5145 &= 0 \\ \mathbf{R_{10} = 31,098 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_X &= 0 \\ -R_9 - R_{10} \times \cos \alpha &= 0 \\ -R_9 - 31,098 \times 0,8575 &= 0 \\ \mathbf{R_9 = -26,667 \text{ kN}} \end{aligned}$$

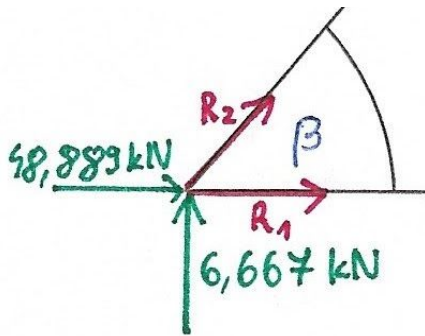
b) węzeł 2



$$\begin{aligned} \sum P_Y &= 0 \\ \mathbf{R_8 = 0 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_X &= 0 \\ -R_5 + R_9 &= 0 \\ -R_5 + (-26,667) &= 0 \\ \mathbf{R_5 = -26,667 \text{ kN}} \end{aligned}$$

c) węzeł 3



$$\sum P_Y = 0$$

$$-R_2 \times \sin\beta - 6,667 = 0$$

$$-R_2 \times 0,7682 - 6,667 = 0$$

$$R_2 = -8,679 \text{ kN}$$

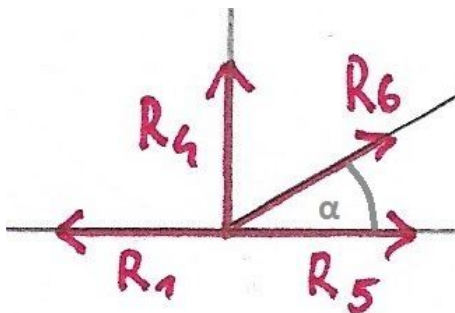
$$\sum P_X = 0$$

$$48,889 + R_2 \times \cos\beta + R_1 = 0$$

$$48,889 + (-8,679) \times 0,6402 + R_1 = 0$$

$$R_1 = -43,333 \text{ kN}$$

d) węzeł 4



$$\sum P_X = 0$$

$$-R_1 + R_5 + R_6 \times \cos\alpha = 0$$

$$-(-43,333) + (-26,667) + R_6 \times 0,8575 = 0$$

$$R_6 = -19,436 \text{ kN}$$

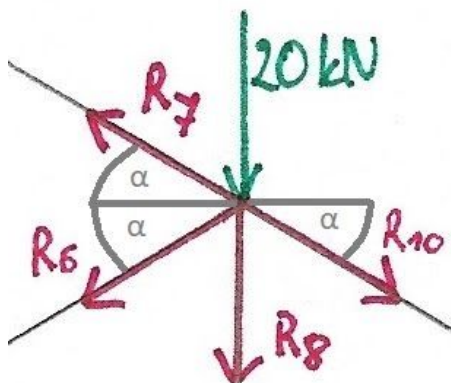
$$\sum P_Y = 0$$

$$-R_4 - R_6 \times \sin\alpha = 0$$

$$-R_4 - (-19,436) \times 0,5145 = 0$$

$$R_4 = 10 \text{ kN}$$

e) węzeł 5



$$\sum P_X = 0$$

$$-R_7 \times \cos\alpha - R_6 \times \cos\alpha + R_{10} \times \cos\alpha = 0$$

$$-R_7 \times 0,8575 - (-19,436) \times 0,8575 + 31,098 \times 0,8575 = 0$$

$$R_7 = 50,534 \text{ kN}$$

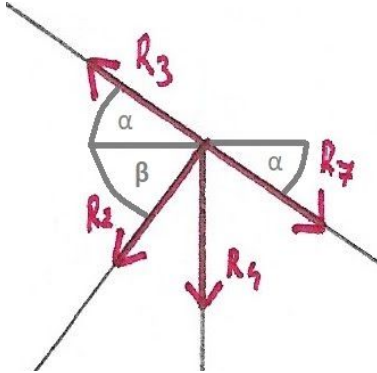
$$\sum P_Y = 0 \text{ (Sprawdzenie)}$$

$$20 + R_{10} \times \sin\alpha + R_8 + R_6 \times \sin\alpha - R_7 \times \sin\alpha = 0$$

$$20 + 31,098 \times 0,5145 + 0 + (-19,436) \times 0,5145 - 50,534 \times 0,5145 = 0$$

$$0,000356 \approx 0 \text{ kN}$$

f) węzeł 6



$$\sum P_x = 0$$

$$-R_3 \times \cos\alpha - R_2 \times \cos\beta + R_7 \times \cos\alpha = 0$$

$$-R_3 \times 0,8575 - (-8,679) \times 0,6402 + 50,534 \times 0,8575 = 0$$

$$R_3 = 57,014 \text{ kN}$$

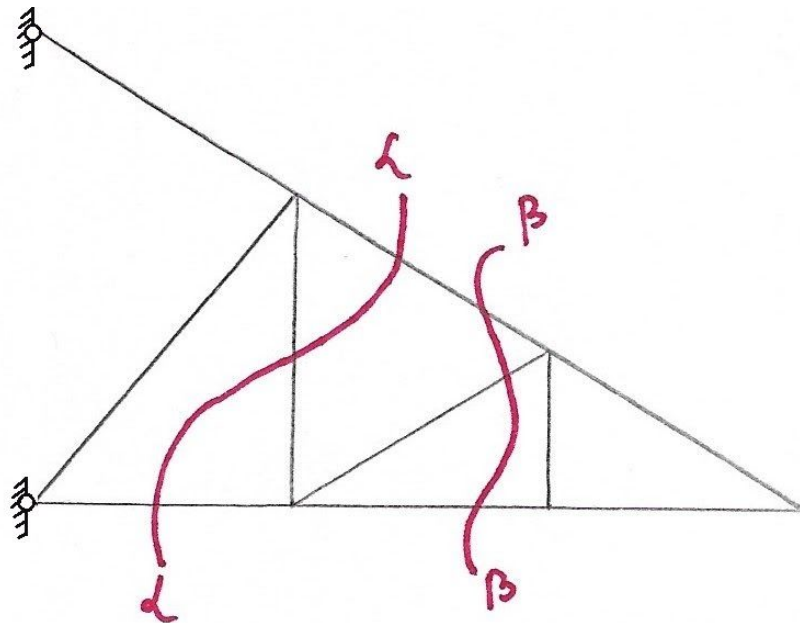
$$\sum P_y = 0 \text{ (Sprawdzenie)}$$

$$-R_3 \times \sin\alpha + R_7 \times \sin\alpha + R_4 + R_2 \times \sin\beta = 0$$

$$-57,014 \times 0,5145 + 50,534 \times 0,5145 + 10 + (-8,679) \times 0,7682 = 0$$

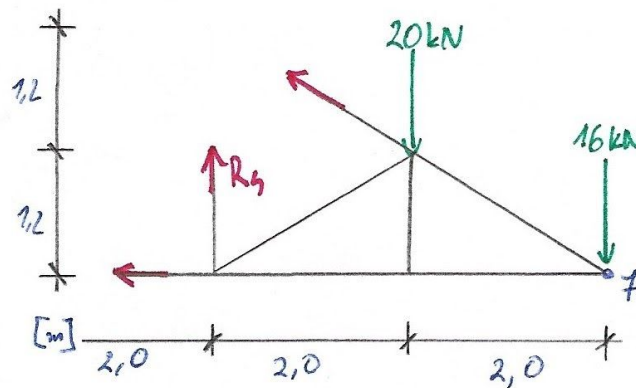
$$-0,0011678 \approx 0 \text{ kN}$$

11. Wyznaczanie sił we wskazanych prętach metodą Rittera



Siły wskazane do wyznaczenia: R_4 , R_6 , R_7

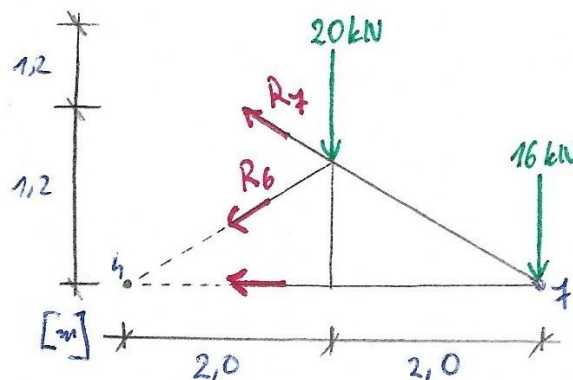
c) R_4



$$\begin{aligned}\sum M_7 &= 0 \\ R_4 \times 4 - 20 \times 2 &= 0 \\ \mathbf{R_4 = 10 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Sprawdzenie z poprzednim wynikiem:
 $10 - 10 = 0$

d) $R_6 + R_7$



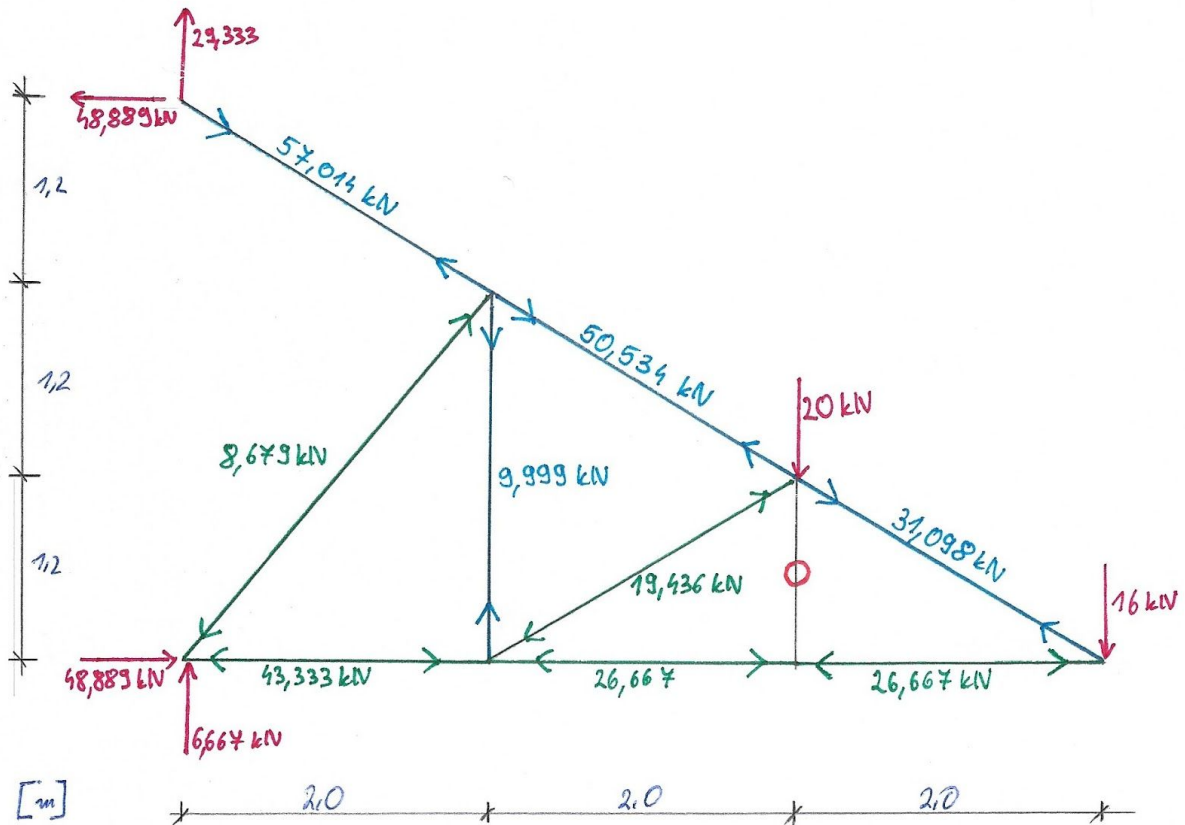
$$\begin{aligned}\sum M_4 &= 0 \\ -R_7 \times \sin \alpha \times 2 - R_7 \times \cos \alpha \times 1,2 + 20 \times 2 + 16 \times 4 &= 0 \\ -R_7 \times 0,5145 \times 2 - R_7 \times 0,8575 \times 1,2 + 20 \times 2 + 16 \times 4 &= 0 \\ \mathbf{R_7 = 50,534 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Sprawdzenie z poprzednim wynikiem:
 $50,534 - 50,534 = 0 \text{ kN}$

$$\begin{aligned}\sum M_7 &= 0 \\ -R_6 \times \sin \alpha \times 2 - R_6 \times \cos \alpha \times 1,2 - 20 \times 2 &= 0 \\ -R_6 \times 0,5145 \times 2 - R_6 \times 0,8575 \times 1,2 - 20 \times 2 &= 0 \\ \mathbf{R_6 = -19,436 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Sprawdzenie z poprzednim wynikiem:
 $-19,436 - (-19,436) = 0 \text{ kN}$

12. Zestawienie sił



Wszystkie wartości podane w kN
 Kolor niebieski - pręty rozciągane
 Kolor zielony - pręty ściskane