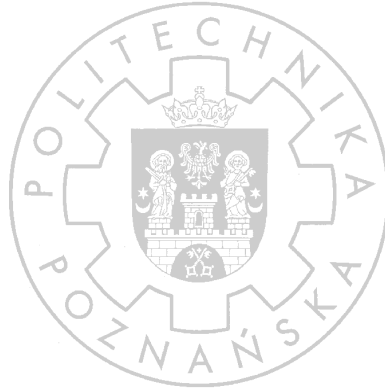


POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH  
Zakład Mechaniki Budowli



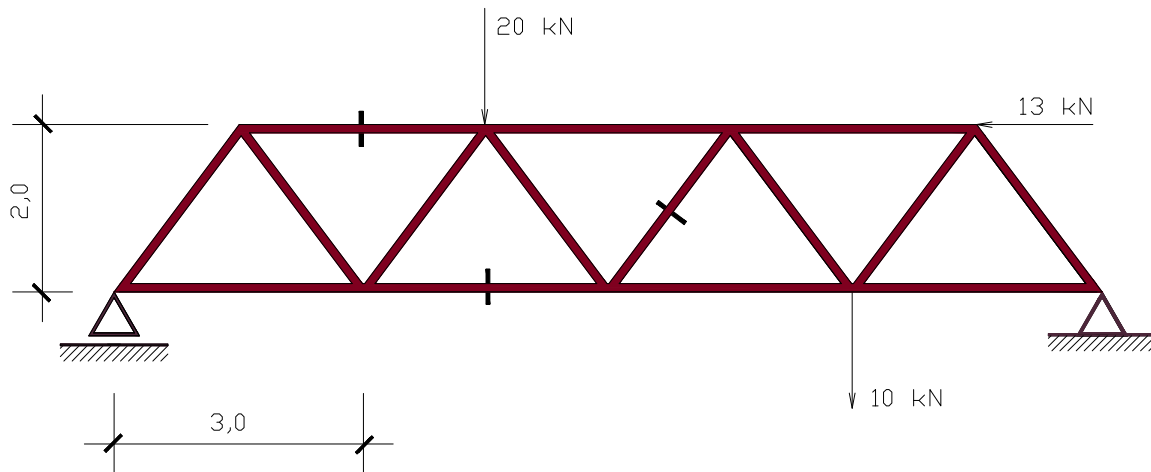
Ćwiczenie nr 4

WYZNACZANIE SIŁ W PRĘTACH  
KRATOWNIC PŁASKICH

Wykonał: **Dariusz Włochal**  
gr. B6  
rok akad. 2003/2004

**Zadanie:** Dla danej kratownicy wyznaczyć siły we wszystkich prętach metodą równoważenia węzłów. W zaznaczonych prętach wyznaczyć siły metodą Rittera.

1. Dana jest następująca kratownica:



## 2. Dyskusja statycznej wyznaczalności układu:

Warunek konieczny geometrycznej niezmienności i statycznej wyznaczalności kratownicy o strukturze prostej:

$$p = 2w - r$$

gdzie odpowiednio:  $p$  – liczba prętów kratownicy  
 $w$  – liczba węzłów kratownicy  
 $r$  – liczba stopni swobody odbieranych przez podpory

Dla danej kratownicy mamy:

$$p = 15$$

$$w = 9$$

$$r = 2 + 1 = 3$$

Zatem:

$$15 = 2 \cdot 9 - 3$$

$$15 = 15$$

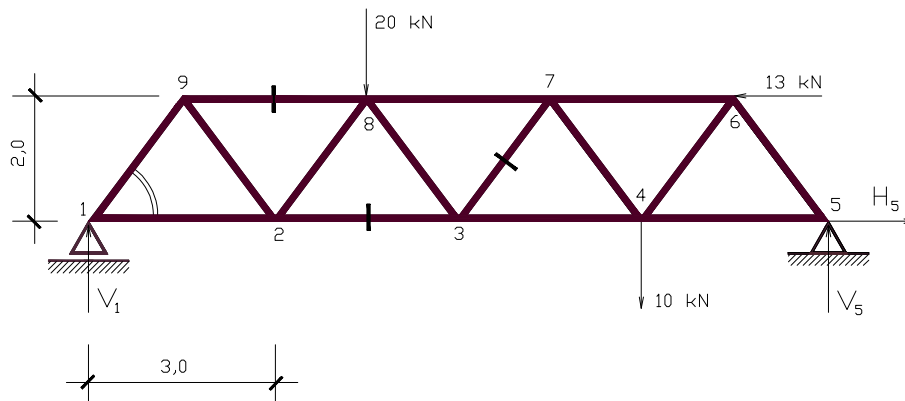
$$0 = 0$$

Warunek konieczny geometrycznej niezmienności kratownicy o strukturze prostej jest więc spełniony.

## 3. Dyskusja geometrycznej niezmienności układu:

Dana kratownica to kratownica płaska o strukturze prostej. Jest ona więc geometrycznie niezmienna (możemy traktować ją jak tarczę zastępczą). Cały ten niezmienny układ przytwierdzony jest do podłoża za pomocą podpory przegubowo-przesuwnej (z lewej strony) i podpory przegubowo-nieprzesuwnej (z prawej). Podparcie odbiera więc:  $1 + 2 = 3$  stopnie swobody. Przegub nie leży na kierunku pręta - cały układ jest zatem geometrycznie niezmienny.

#### 4. Uwolnijmy daną kratownicę od więzów i wyznaczmy reakcje:



Napiszmy równania równowagi i wyznaczmy reakcje:

$$\sum X = H_5 - 13 = 0$$

$$\underline{H_5 = 13 \text{ kN}}$$

$$\sum M_5 = -13 \cdot 2 - 10 \cdot 3 - 20 \cdot 7,5 + V_1 \cdot 12 = 0$$

$$-26 - 30 - 150 + 12 \cdot V_1 = 0$$

$$-206 + 12 \cdot V_1 = 0$$

$$12 \cdot V_1 = 206 / 12$$

$$\underline{V_1 = 17,16667 \text{ kN}}$$

$$\sum Y = V_1 - 20 - 10 + V_5 = 0$$

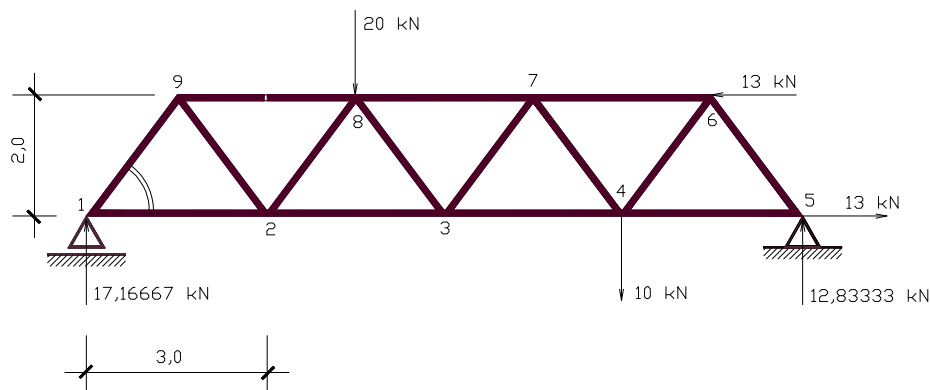
$$17,16667 - 30 + V_5 = 0$$

$$\underline{V_5 = 12,83333 \text{ kN}}$$

Sprawdzenie poprawności wyznaczenia sił zewnętrznych:

$$\begin{aligned} \sum M_3 &= V_1 \cdot 6 - 20 \cdot 1,5 + 10 \cdot 3 - 13 \cdot 2 - V_5 \cdot 6 = \\ &= 17,16667 \cdot 6 - 30 + 30 - 26 - 12,83333 \cdot 6 = \\ &= 103,00002 - 26 - 76,99998 = 0,00004 \approx 0 \end{aligned}$$

#### 5. Zestawienie – reakcje:



**6. Wyznamy siły w prętach kratownicy:**

Siły w prętach kratownicy wyznaczymy metodą równoważenia węzłów. Dla trzech zaznaczonych prętów wyznaczymy też siły metodą Rittera sprawdzając w ten sposób przebieg obliczeń pierwszą metodą.

Długość krzyżulców:

$$k = \sqrt{(1,5)^2 + 2^2} = \sqrt{2,25 + 4} = \sqrt{6,25} = 2,5 \text{ m}$$

A więc:

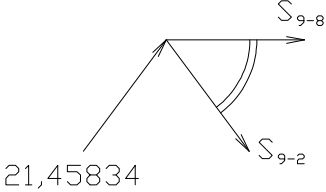
$$\sin \alpha = \frac{2}{2,5} = 0,8$$

$$\cos \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$$

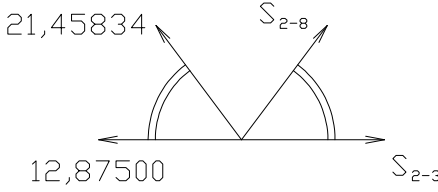
WEZEŁ 1:

	$\begin{aligned} \sum Y &= 17,16667 + S_{1-9} \cdot \sin \alpha = 0 \\ 17,16667 + 0,8 \cdot S_{1-9} &= 0 \\ 0,8 \cdot S_{1-9} &= -17,16667 / 0,8 \\ \underline{S_{1-9} &= -21,45834 \text{ kN}} \end{aligned}$ $\begin{aligned} \sum X &= S_{1-2} + S_{1-9} \cdot \cos \alpha = 0 \\ S_{1-2} - 0,6 \cdot 21,45834 &= 0 \\ S_{1-2} - 12,87500 &= 0 \\ \underline{S_{1-2} &= 12,87500 \text{ kN}} \end{aligned}$
--	--

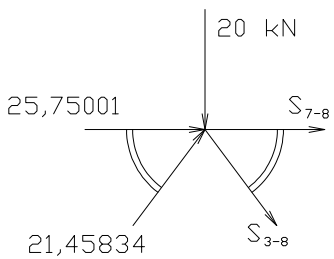
WEZEŁ 9:

	$\begin{aligned} \sum Y &= 21,45834 \cdot \sin \alpha - S_{9-2} \cdot \sin \alpha = 0 \\ 21,45834 \cdot 0,8 - 0,8 \cdot S_{9-2} &= 0 \\ 0,8 \cdot S_{9-2} &= 0,8 \cdot 21,45834 / 0,8 \\ \underline{S_{9-2} &= 21,45834 \text{ kN}} \end{aligned}$ $\begin{aligned} \sum X &= S_{9-2} \cdot \cos \alpha + S_{9-8} + 21,45834 \cdot \cos \alpha = 0 \\ 21,45834 \cdot 0,6 + S_{9-8} + 21,45834 \cdot 0,6 &= 0 \\ S_{9-8} + 2 \cdot 0,6 \cdot 21,45834 &= 0 \\ \underline{S_{9-8} &= -25,75001 \text{ kN}} \end{aligned}$
---	---

WEZŁ 2:

	$\begin{aligned} \sum Y &= 21,45834 \cdot \sin \alpha + S_{2-8} \cdot \sin \alpha = 0 \\ 21,45834 \cdot 0,8 &= -0,8 \cdot S_{2-8} \\ 0,8 \cdot S_{2-8} &= -0,8 \cdot 21,45834 / 0,8 \\ \underline{S_{2-8} &= -21,45834 \text{ kN}} \end{aligned}$ $\begin{aligned} \sum X &= -12,87500 - 21,45834 \cdot \cos \alpha + \\ &+ (-21,45834 \cdot \cos \alpha) + S_{2-3} = 0 \\ -12,87500 - 21,45834 \cdot 0,6 + \\ &- 21,45834 \cdot 0,6 + S_{2-3} = 0 \\ \underline{S_{2-3} &= 38,62501 \text{ kN}} \end{aligned}$
--	---

WEZŁ 8:

	$\begin{aligned} \sum Y &= -20 + 21,45834 \cdot \sin \alpha - S_{3-8} \cdot \sin \alpha = 0 \\ -20 + 21,45834 \cdot 0,8 - 0,8 \cdot S_{3-8} &= 0 \\ 0,8 \cdot S_{3-8} &= -2,833328 / 0,8 \\ \underline{S_{3-8} &= -3,54166 \text{ kN}} \end{aligned}$ $\begin{aligned} \sum X &= S_{7-8} + 25,75001 + 21,45834 \cdot \cos \alpha + \\ &+ (-3,54166) \cdot \cos \alpha = 0 \\ S_{7-8} + 25,75001 + 21,45834 \cdot 0,6 + \\ &+ (-3,54166) \cdot 0,6 = 0 \\ \underline{S_{7-8} &= -36,5000 \text{ kN}} \end{aligned}$
---	--

WEZŁ 3:

	$\sum Y = -3,54166 \cdot \sin \alpha + S_{3-7} \cdot \sin \alpha = 0$ $0,8 \cdot S_{3-7} = 0,8 \cdot 3,54166$ $\underline{S_{3-7} = 3,54166 \text{ kN}}$ $\sum X = -38,62501 + 3,54166 \cdot \cos \alpha +$ $+ 3,54166 \cdot \cos \alpha + S_{3-4} = 0$ $- 38,62501 + 3,54166 \cdot 0,6 \cdot 2 + S_{3-4} = 0$ $\underline{S_{3-4} = 34,37501 \text{ kN}}$
--	--

WEZEŁ 7:

	$\sum Y = -3,54166 \cdot \sin \alpha - S_{4-7} \cdot \sin \alpha = 0$ $- 3,54166 \cdot 0,8 - 0,8 \cdot S_{4-7} = 0$ $0,8 \cdot S_{4-7} = -0,8 \cdot 3,54166 / 0,8$ $\underline{S_{4-7} = -3,54166 \text{ kN}}$ $\sum X = S_{6-7} + 36,50000 + (-3,54166) \cdot \cos \alpha +$ $- 3,54166 \cdot \cos \alpha = 0$ $S_{6-7} + 36,50000 - 3,54166 \cdot 0,6 +$ $- 3,54166 \cdot 0,6 = 0$ $\underline{S_{6-7} = 32,25001 \text{ kN}}$
--	--

WEZEŁ 4:

	$\sum Y = -10 - 3,54166 \cdot \sin \alpha + S_{4-6} \cdot \sin \alpha = 0$ $0,8 \cdot S_{4-6} = 0,8 \cdot 3,54166 + 10$ $\underline{S_{4-6} = 16,04166 \text{ kN}}$ $\sum X = -34,37501 + 16,04166 \cdot \cos \alpha +$ $+ 3,54166 \cdot \cos \alpha + S_{4-5} = 0$ $- 34,37501 + 16,04166 \cdot 0,6 +$ $+ 3,54166 \cdot 0,6 + S_{4-5} = 0$ $\underline{S_{4-5} = 22,62502 \text{ kN}}$
--	---

WEZEŁ 6:

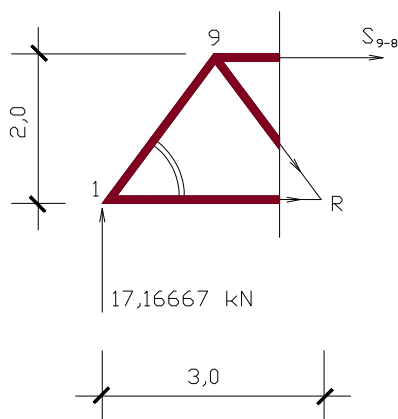
	$\begin{aligned} \sum Y &= -16,04166 \cdot \sin \alpha - S_{5-6} \cdot \sin \alpha = 0 \\ &= -16,04166 \cdot 0,8 - 0,8 \cdot S_{4-7} = 0 \\ 0,8 \cdot S_{4-7} &= -0,8 \cdot 16,04166 / 0,8 \\ \underline{S_{4-7}} &= -16,04166 \text{ kN} \end{aligned}$ <p>(sprawdzenie)</p> $\begin{aligned} \sum X &= 32,25001 - 13 + S_{5-6} \cdot \cos \alpha + \\ &= -16,04166 \cdot \cos \alpha = 0 \\ 0,6 \cdot S_{5-6} + 32,25001 - 16,04166 \cdot 0,6 - 13 &= 0 \\ \underline{S_{5-6}} &= -16,04169 \text{ kN} \end{aligned}$
--	---

WĘZEŁ 5 (sprawdzenie):

	$\begin{aligned} \sum Y &= 12,83333 - 16,04166 \cdot \sin \alpha = \\ &= 12,83333 - 16,04166 \cdot 0,8 = \\ &= 12,83333 - 12,83333 = \underline{0} \end{aligned}$ $\begin{aligned} \sum X &= -22,62502 + 16,04166 \cdot \cos \alpha + 13 = \\ &= -22,62502 + 16,04166 \cdot 0,6 + 13 = \\ &= -22,62502 + 9,62500 + 13 = -0,00002 \approx \underline{0} \end{aligned}$
--	---

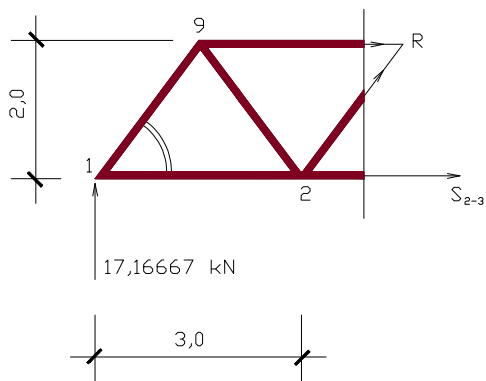
### 7. Wyznamy siły w zaznaczonych prętach metodą Rittera:

Siła:  $S_{9-2}$



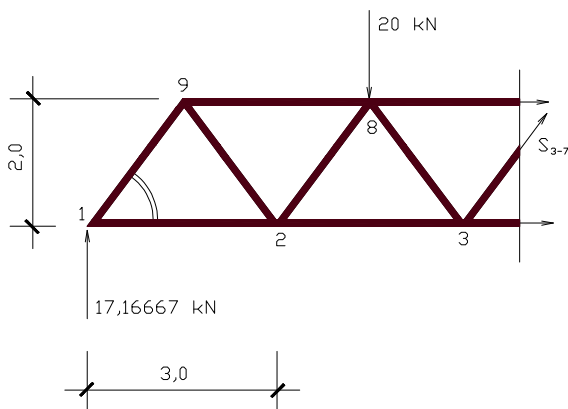
$$\begin{aligned} \sum M_R &= 17,16667 \cdot 3,0 + S_{9-8} \cdot 2,0 = 0 \\ 51,50001 + 2,0 \cdot S_{9-8} &= 0 \\ 2,0 \cdot S_{9-8} &= -51,50001 / 2,0 \\ \underline{S_{9-8}} &= -25,75001 \text{ kN} \end{aligned}$$

Siła:  $S_{2-3}$



$$\begin{aligned} \sum M_R &= 17,16667 \cdot (1,5 + 3,0) - S_{2-3} \cdot 2,0 = 0 \\ 17,16667 \cdot 4,5 - 2,0 \cdot S_{2-3} &= 0 \\ 2,0 \cdot S_{2,3} &= 77,250015 / 2,0 \\ \underline{S_{2-3} &= 38,62501 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Siła:  $S_{3-7}$



$$\begin{aligned} \sum Y &= -20 + 17,16667 + S_{3-7} \cdot \sin \alpha = 0 \\ -2,83333 + S_{3-7} \cdot 0,8 &= 0 \\ \underline{S_{3,7} &= 3,54166 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy identyczne wyniki w obu metodach.

### 8. Zestawienie wyników:

