

OB LICZ ANIE PRZEMIESZCZEŃ Z ZASTOSOWANIEM RÓWNANIA PRACY WIRTUALNEJ

Dla zadanej ramy, doznającej wpływu sił zewnętrznych, zmian temperatury i osiadania podpór, wyznaczyć:

- przemieszczenie pionowe, poziome i wypadkowe punktu K,
- obrót przekroju w punkcie S,
- wzajemne zbliżenie punktów R i S,
- obrót cięciwy R-S.

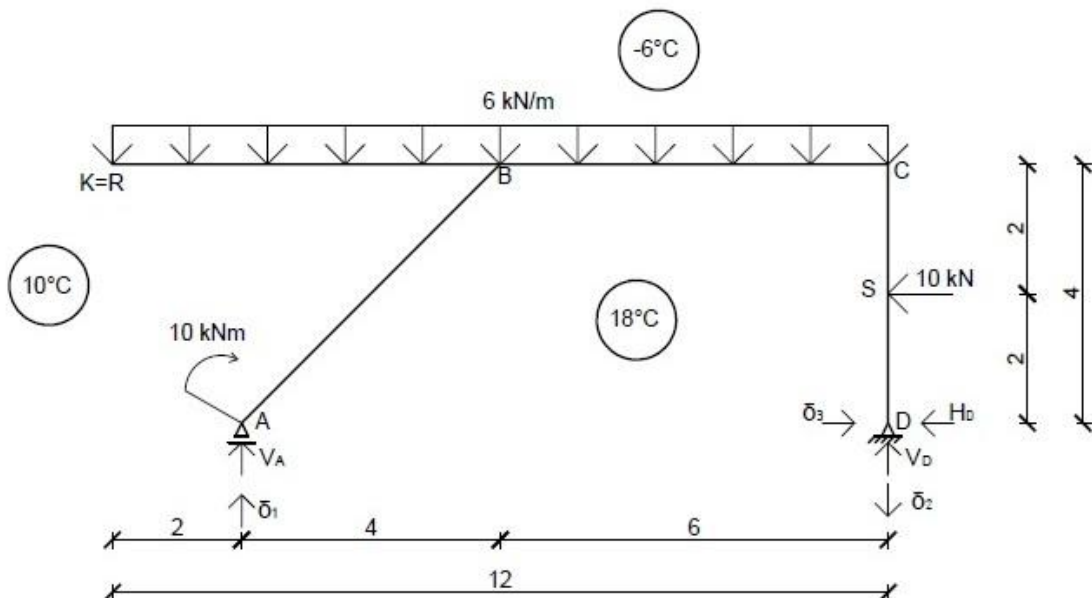
1. Dane wyjściowe do projektu:

$$t_m = 2^\circ\text{C}$$

$$\delta_1 = 0,02 \text{ m}$$

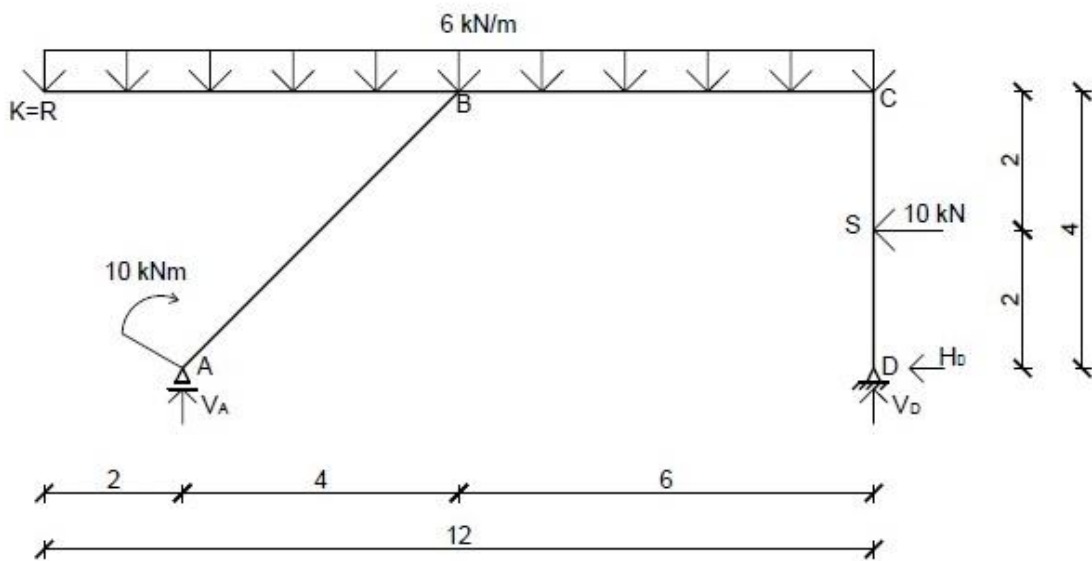
$$\delta_2 = 0,03 \text{ m}$$

$$\delta_3 = 0,01 \text{ m}$$



$$\bar{\mathbf{1}} \cdot \delta = \sum \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx + \sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} dx + \sum \int \bar{N} \alpha t_0 dx - \sum \bar{R} \Delta$$

2. Wyznaczenie reakcji podporowych:



$$\sum M_A = 10 - 6 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 10 \cdot 5 - 10 \cdot 2 - V_D \cdot 10 = 0;$$

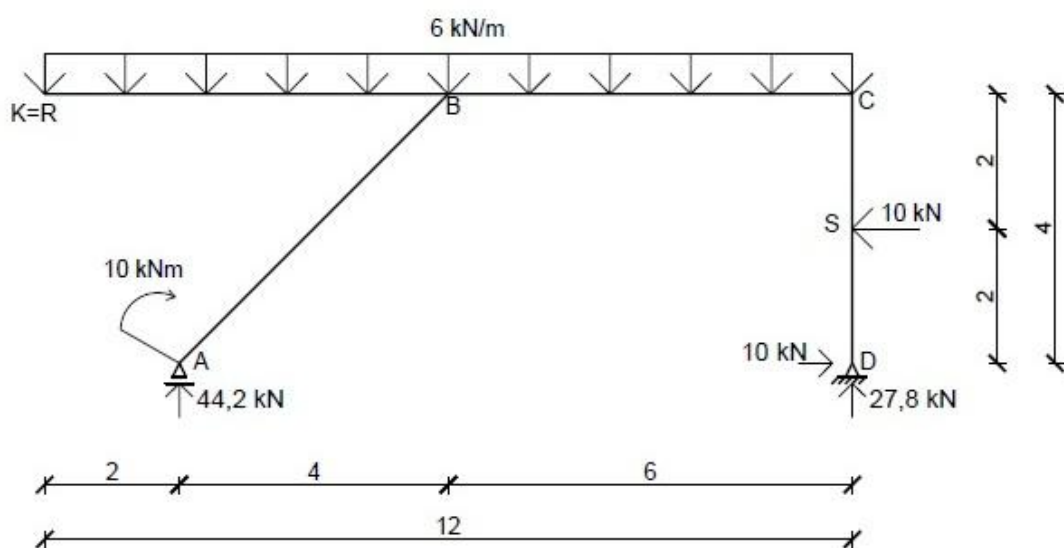
$$V_D = 27,8 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = -10 \cdot 2 - 6 \cdot 12 \cdot 6 + 10 + V_A \cdot 10 = 0;$$

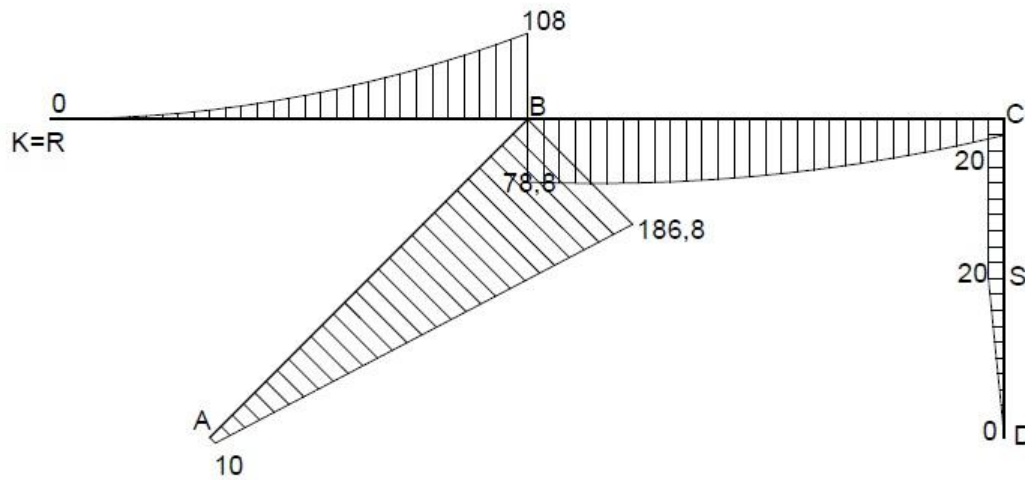
$$V_A = 44,2 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 10 \cdot 2 + H_D \cdot 4 + 10 + V_A \cdot 10 - 6 \cdot 12 \cdot 6 = 0;$$

$$H_D = -10 \text{ kN}$$



3. Wykres momentów zginających [kNm]:



4. Dobór przekroju prętów:

$$\sigma = \frac{1,2 \cdot M_{max}}{w} \rightarrow w = \frac{1,2 \cdot M_{max}}{\sigma}$$

$$M_{max} = 186,8 \text{ kNm} = 18680 \text{ kNcm}$$

$$\sigma = 20 \text{ kN/cm}^2$$

$$w = \frac{1,2 \cdot 18680}{20} = 1120,8 \text{ cm}^3$$

Przyjęto: IPE 400:

$$h = 0,45 \text{ m}$$

$$w = 1160 \text{ cm}^3$$

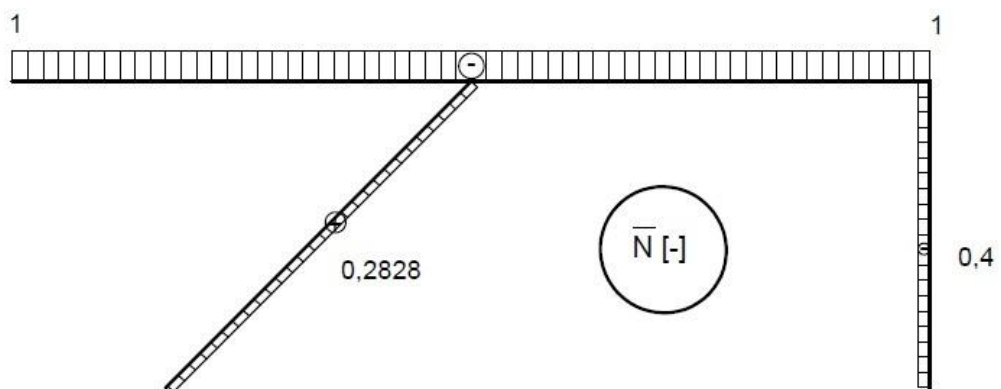
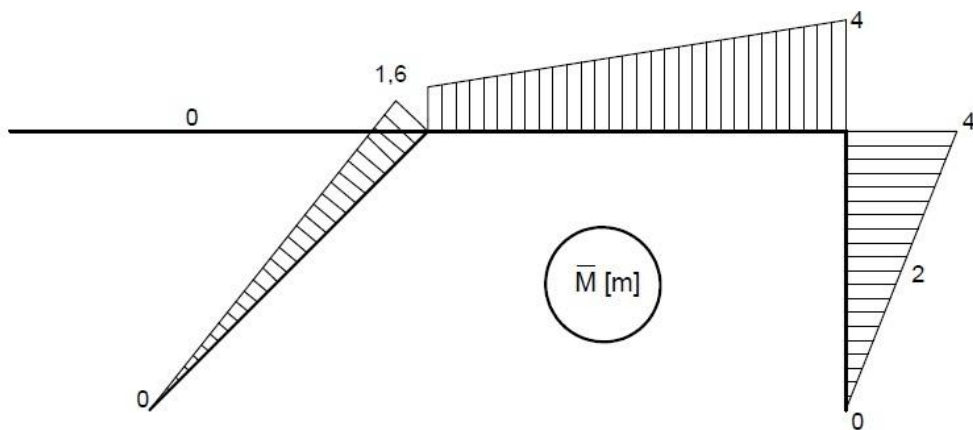
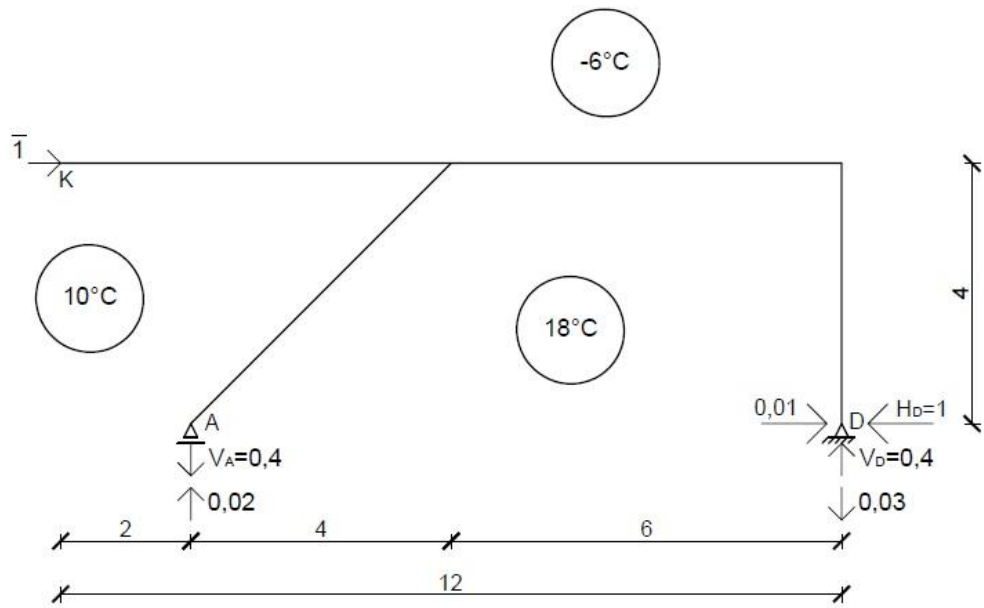
$$I = 23130 \text{ cm}^4$$

$$E = 205 \text{ Gpa}$$

Sztywność na zginanie:

$$EI = 205 \cdot 10^6 \cdot 23130 \cdot 10^{-8} = 47416,5 \text{ kNm}^2$$

5. Przesunięcie punktu K (składowa pozioma):



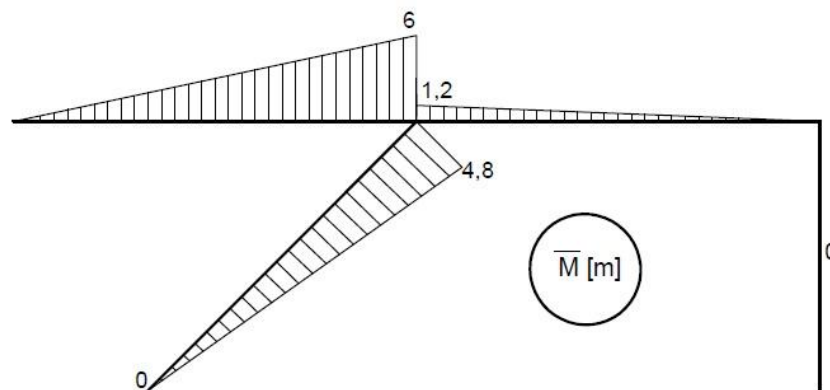
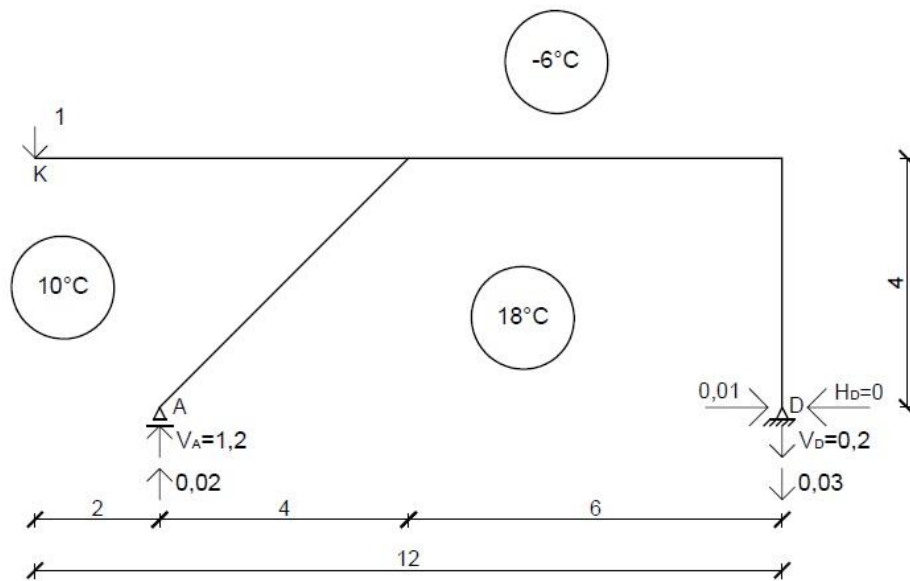
$$h_K^P = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 5,65685 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,6 - \frac{1}{2} \cdot 5,65685 \cdot 186,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \right. \\ \left. - 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 + 2) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 20 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1,6 \right) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 78,8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,6 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1,6 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) \right] = -0,03769 \text{ m}$$

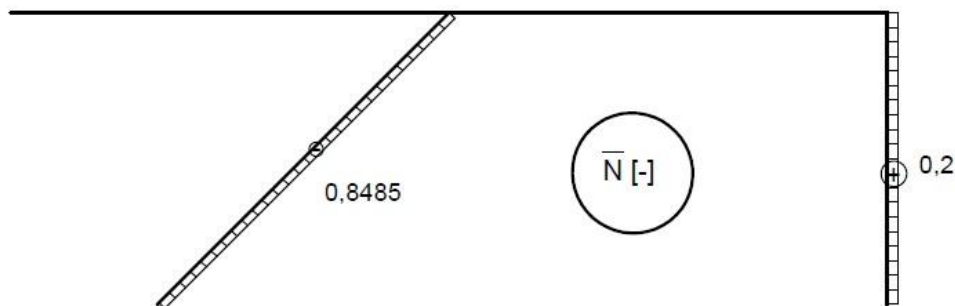
$$h_K^T = \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{0,4} \left[-\frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 5,65685 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 6 \cdot 24 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 24 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 24 \right] + \\ + 1,2 \cdot 10^{-5} [-0,4 \cdot 4 \cdot 4 + 0,2828 \cdot 5,65685 \cdot 12 - 1 \cdot 6 \cdot 4] = -0,01908 \text{ m}$$

$$h_K^\Delta = -(-0,02 \cdot 0,4 - 1 \cdot 0,01 - 0,03 \cdot 0,4) = 0,006 \text{ m}$$

$$h_K = h_K^P + h_K^T + h_K^\Delta = -0,05077 \text{ m}$$

6. Przemieszczenie punktu K (składowa pionowa):





$$v_K^P = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 108 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 78,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 5,65685 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,8 + \frac{1}{2} \cdot 5,65685 \cdot 186,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,8 \right] = 0,05125 \text{ m}$$

$$v_K^T = \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{0,4} \left[\frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 5,65685 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,2 \cdot 24 \right] + \\ + 1,2 \cdot 10^{-5} [0,2 \cdot 4 \cdot 4 - 0,8485 \cdot 5,65685 \cdot 12] = -0,008626 \text{ m}$$

$$v_K^\Delta = -(1,2 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,03) = -0,03 \text{ m}$$

$$v_K = v_K^P + v_K^T + v_K^\Delta = \mathbf{0,01262 \text{ m}}$$

7. Przemieszczenie punktu K (wypadkowa):

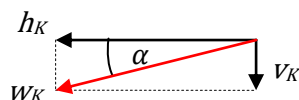
Wartość:

$$w_K = \sqrt{h_K^2 + v_K^2} = \sqrt{(-0,05077)^2 + (0,01262)^2} = \mathbf{0,05232 \text{ m}}$$

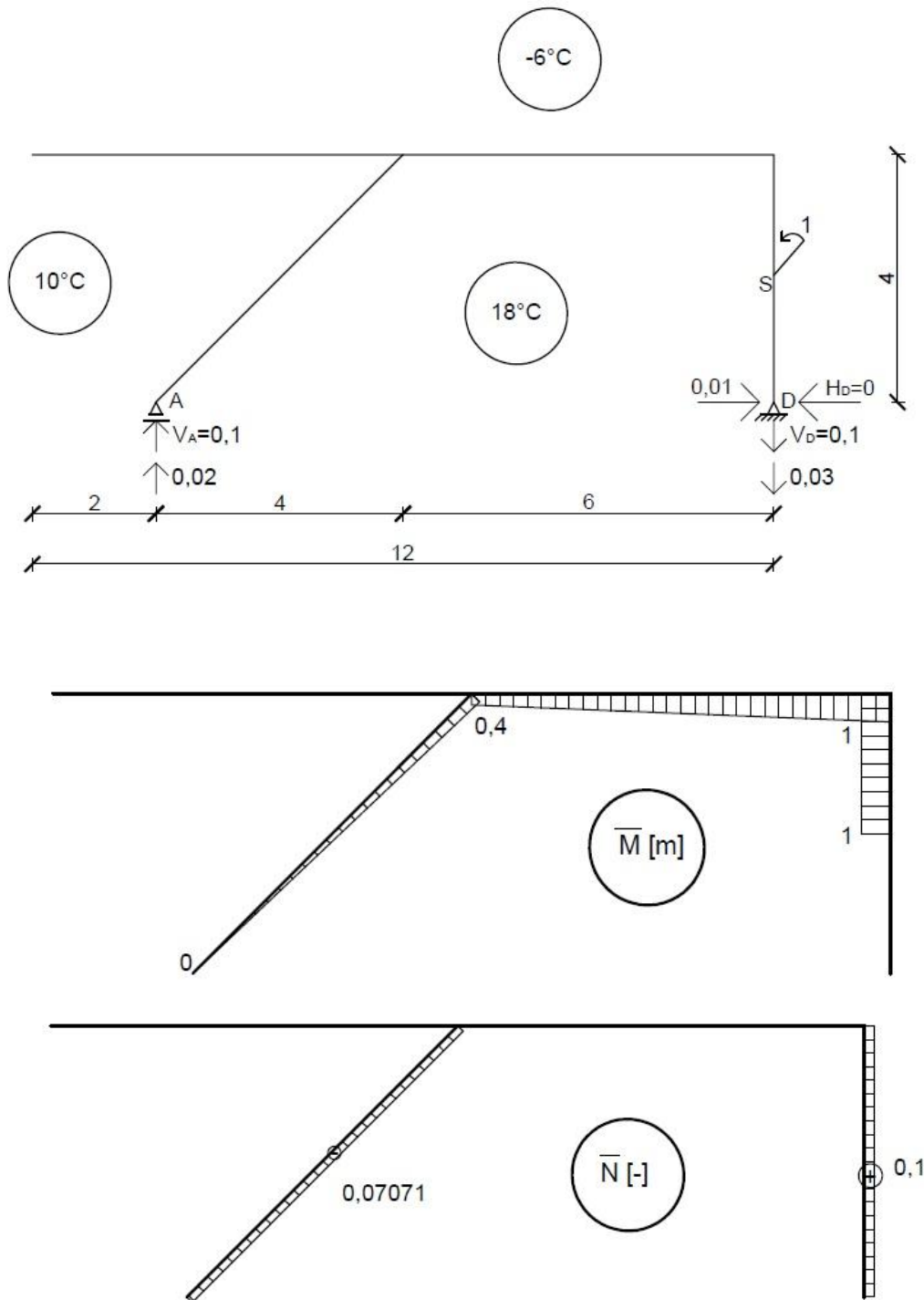
Kierunek:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_K}{h_K} = \frac{0,01262}{-0,05077} = 0,2486 \rightarrow \alpha = 13,96^\circ$$

Zwrot:



8. Obrót przekroju S:



$$\begin{aligned} \varphi_s^P &= \frac{1}{EI} \left[20 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 78,8 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5,65685 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 5,65685 \cdot 186,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 \right] = \\ &= 0,009493 \text{ m} \end{aligned}$$

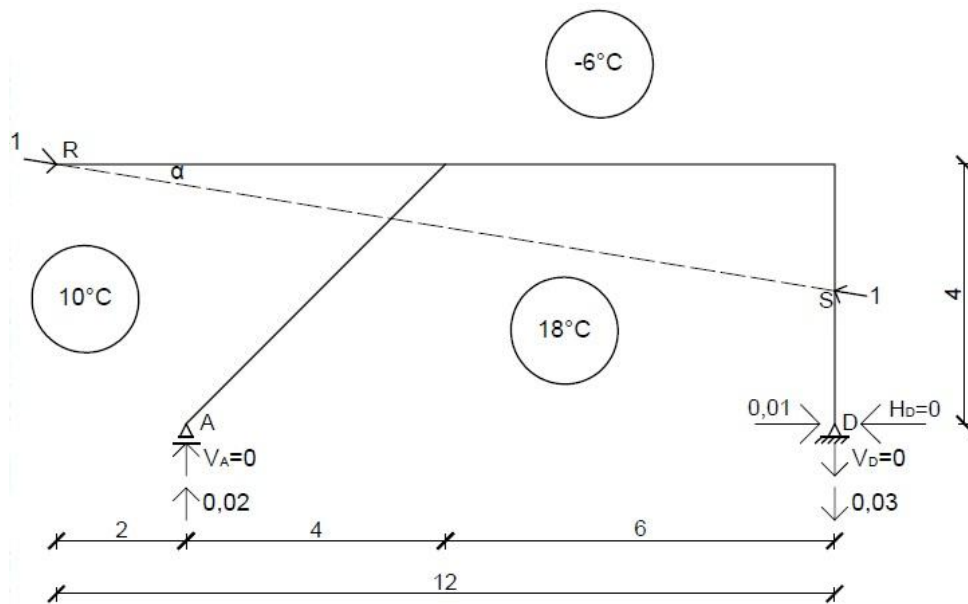
$$\varphi_S^T = \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{0,4} \left[2 \cdot 1 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 5,65685 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,4 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 24 \right] +$$

$$+ 1,2 \cdot 10^{-5} [-0,07071 \cdot 5,65685 \cdot 12 + 0,1 \cdot 4 \cdot 4] = 0,004697m$$

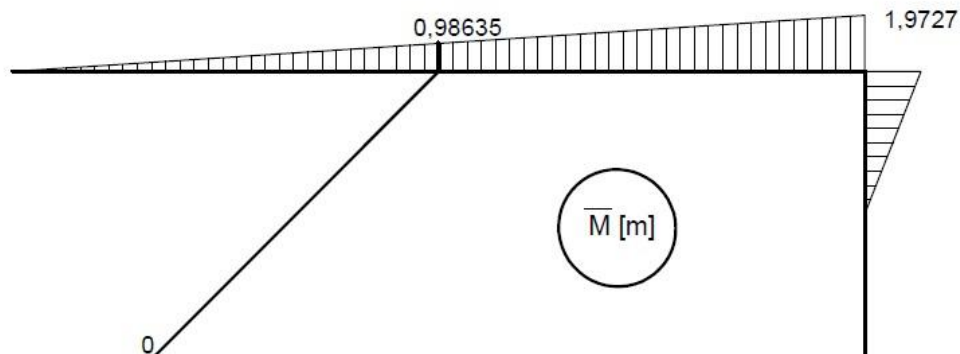
$$\varphi_S^\Delta = -(0,1 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,03) = -0,005 m$$

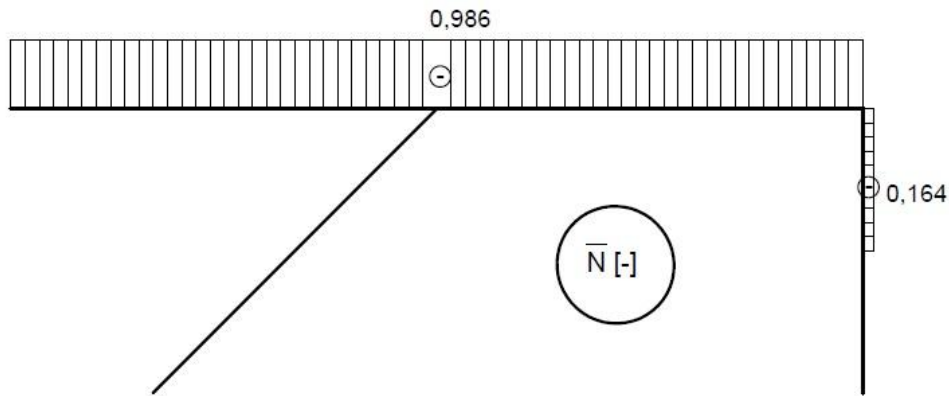
$$\varphi_S = \varphi_S^P + \varphi_S^T + \varphi_S^\Delta = \mathbf{0,00919 m}$$

9. Wzajemne zbliżenie punktów R-S:



$$\cos \alpha = \frac{12}{12,17} \quad \sin \alpha = \frac{2}{12,17}$$





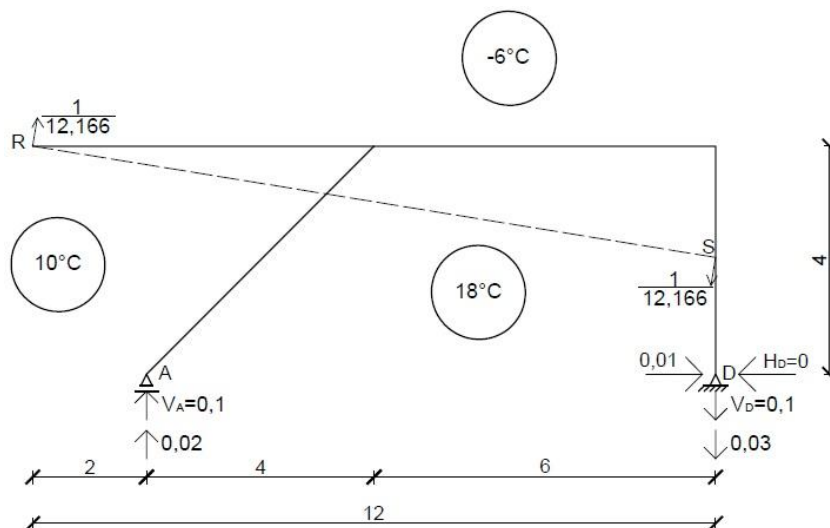
$$\begin{aligned} \delta_{R-S}^P &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,9727 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 108 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,98653 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,98653 \right) - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,9727 + \frac{1}{3} \cdot 0,98653 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 78,8 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1,9727 + \frac{2}{3} \cdot 0,98653 \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,9727 + \frac{1}{2} \cdot 0,98653 \right] \\ &= -0,009053 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{R-S}^T &= \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{0,4} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 1,9727 \cdot 2 \cdot 24 - \frac{1}{2} \cdot 0,98653 \cdot 6 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 1,9727 \cdot 6 \cdot 24 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 0,98653 \cdot 6 \cdot 24 \right] + 1,2 \cdot 10^{-5} [-0,986 \cdot 6 \cdot 4 - 0,164 \cdot 2 \cdot 4] = -0,009533 \text{ m} \end{aligned}$$

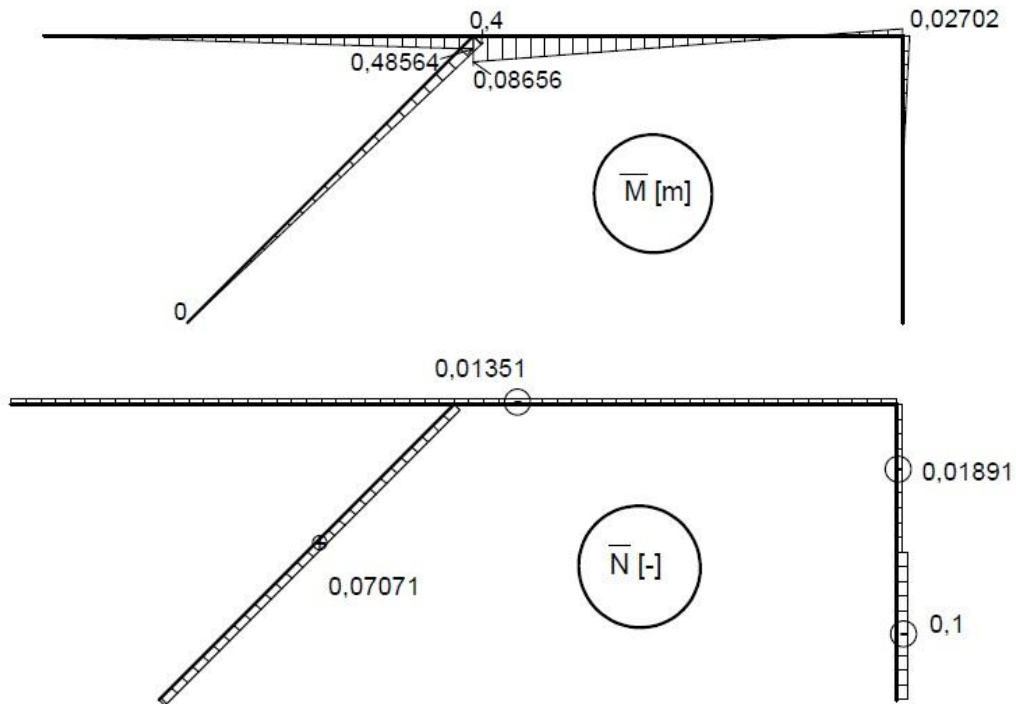
$$\delta_{R-S}^\Delta = 0$$

$$\delta_{R-S} = \delta_{R-S}^P + \delta_{R-S}^T + \delta_{R-S}^\Delta = -0,018586 \text{ m}$$

10. Obrót cięciwy R-S



$$\cos \alpha = \frac{12}{12,17} \quad \sin \alpha = \frac{2}{12,17}$$



$$\begin{aligned} \varphi_{R-S}^P &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 108 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,48564 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,48564 + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot 5,65685 \cdot 186,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 5,65685 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 78,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,08656 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,08656 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,08656 - \frac{1}{2} \cdot 78,8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,02702 - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,02702 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,02702 - 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,02702 \right] = \\ &= 0,001705 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{R-S}^T &= \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{0,4} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,48564 \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 5,65685 \cdot 0,4 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,08656 \cdot 24 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,02702 \cdot 24 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,02702 \cdot 24 \right] + \\ &\quad + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot [-0,01351 \cdot 6 \cdot 4 - 2 \cdot 0,01891 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 0,1 + 5,65685 \cdot 0,07071 \cdot 6] = \\ &= 0,001094 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\varphi_{R-S}^{\Delta} = -[0,1 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,03] = -0,005 \text{ m}$$

$$\varphi_{R-S} = \varphi_{R-S}^P + \varphi_{R-S}^T + \varphi_{R-S}^{\Delta} = -0,002201 \text{ m}$$