

WYKONAŁA: **SARA DZIAMSKA**

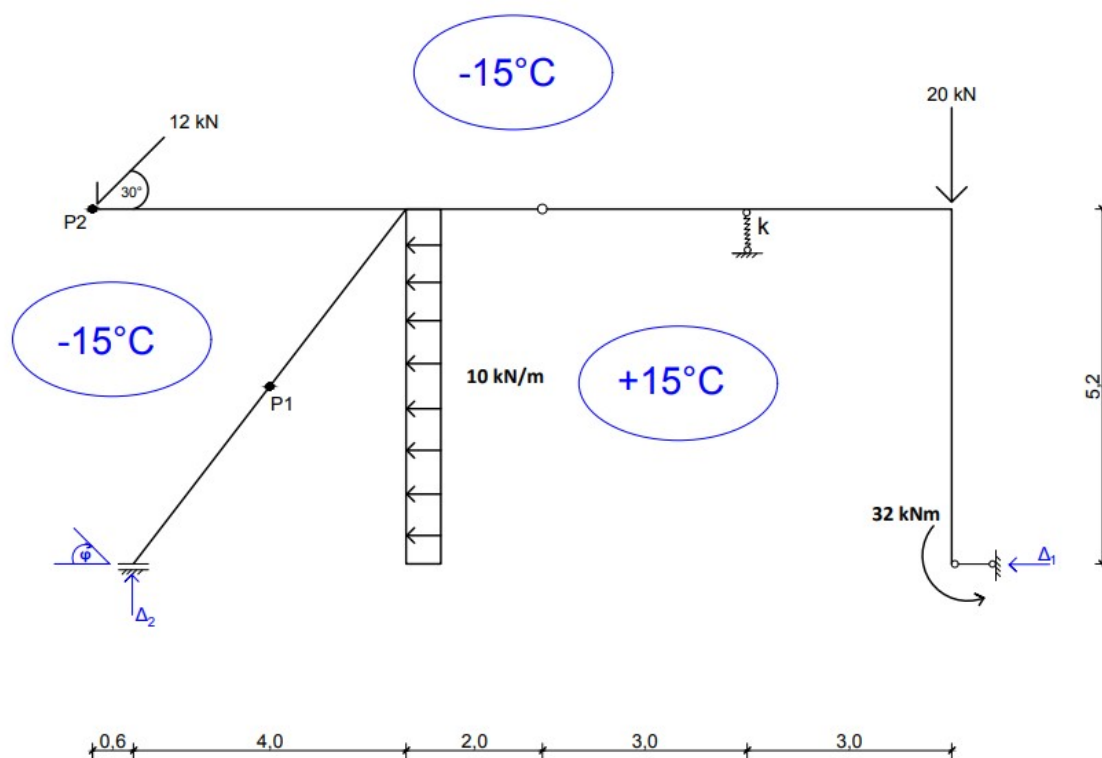
WYDZIAŁ INŻYNIERII LĄDOWEJ I TRANSPORTU

SEMESTR 3, ROK AKADEMICKI 2019/2020

OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ Z ZASTOSOWANIEM RÓWNAŃ PRACY WIRTUALNEJ

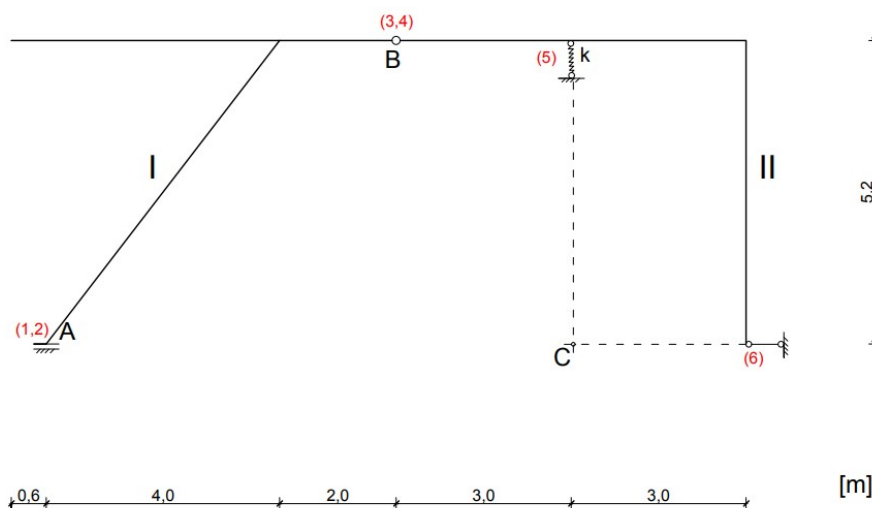
Dla ramy przedstawionej na schemacie:

1. Przyjąć wstępnie przekroje prętów z profili dwuteowych (IN, IPE, HEB, HEA), tak, aby pod działaniem podanego obciążenia powstałe w prętach naprężenia normalne spełniały warunek $\sigma \leq 200 \text{ MPa}$. Należy przyjąć ten sam profil do wszystkich prętów.
2. Obliczyć przemieszczenia zaznaczone w tablicy.



Przyczyna przemieszczenia	Przemieszczenie poziome punktu P1	Przemieszczenie pionowe punktu P2	Przemieszczenie wypadkowe punktu P2	Obrót przekroju w punkcie P2
Obciążenie zewnętrzne (wpływ M)	X	X	X	X
Zmiana temperatury		X		X
Osiadanie podpór			X	X

ANALIZA GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI RAMY



Warunek konieczny :

$$n = w - 3 \cdot t$$

$$t = 2$$

$$w = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6$$

$$n = 6 - 3 \cdot 2 = 0$$

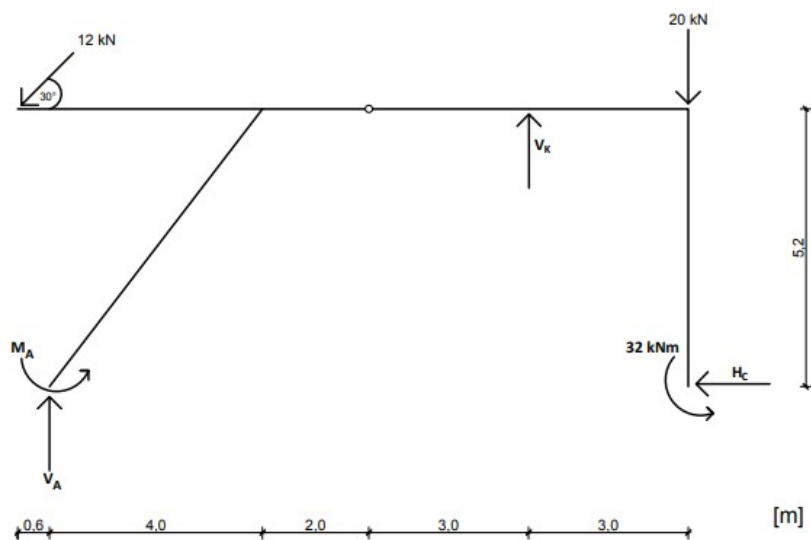
WARUNEK KONIECZNY SPEŁNIONY

Warunek dostateczny :

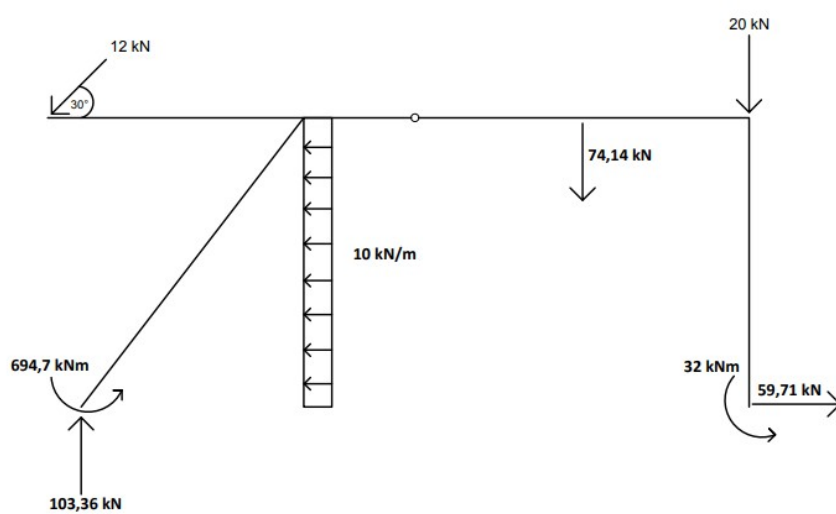
Tarcze I i II tworzą układ trójprzegubowy. Tarcza I podparta jest podporą ślizgową w punkcie A, można ją zastąpić dwoma równoległymi do siebie prętami pionowymi. Tarcza II połączona jest z tarczą I przegubem w punkcie B oraz z podłożem dwoma prętami podporowymi, których kierunki przecinają się, tworząc przegub w punkcie C. Prosta przechodząca przez punkty B i C nie jest równoległa do prętów tworzących podporę ślizgową w punkcie A, a więc całość jest geometrycznie niezmienna.

WARUNEK DOSTATECZNY SPEŁNIONY

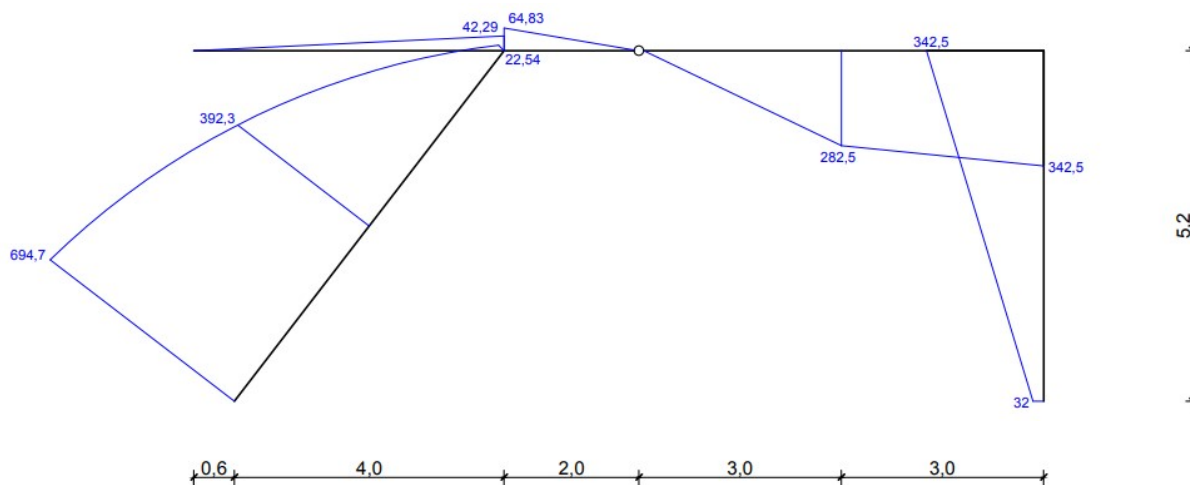
REAKCJE I WYKRES MOMENTÓW OD ZADANEGO OBCIĄŻENIA SIŁAMI ZEWNĘTRZNYMI



ZESTAWIENIE REAKCJI



WYKRES MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH [kNm]



2

PROJEKTOWANIE PRZEKROJU

$$\bar{\sigma} \leq \bar{\sigma}_{dop}, \quad \bar{\sigma}_{dop} = 200 \text{ MPa} = 20 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma = \frac{M}{w_x}$$

$$\frac{M}{w_x} \leq \sigma_{dop} \rightarrow w_x \geq \frac{M_{max}}{\sigma_{dop}}$$

$$w_x \geq \frac{69470,4}{20} \rightarrow w_x \geq 3473,52 \text{ cm}^3$$

Przyjęto przekrój **I 450HEB** o wskaźniku wytrzymałości $w_x = 3550,0 \text{ cm}^3$

Dane przekroju:

$$h = 45,0 \text{ cm}$$

$$t_w = 1,4 \text{ cm}$$

$$A = 218 \text{ cm}^2$$

$$b_f = 30,0 \text{ cm}$$

$$t_f = 2,6 \text{ cm}$$

Sztywność przekroju na zginanie:

$$I = 79890 \text{ cm}^4$$

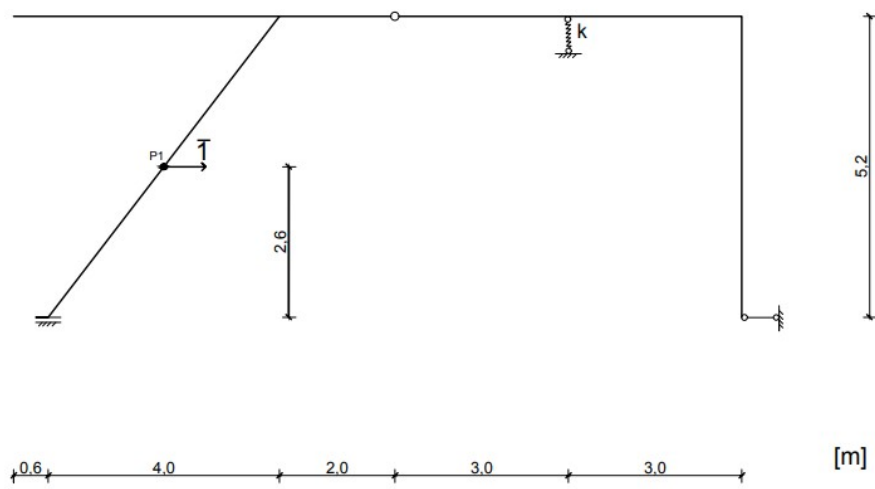
$$EI = 205 \cdot 10^6 \cdot 79890 \cdot 10^{-8} = 163774,5 \text{ kNm}^2$$

Zadana sztywność podpory sprężystej:

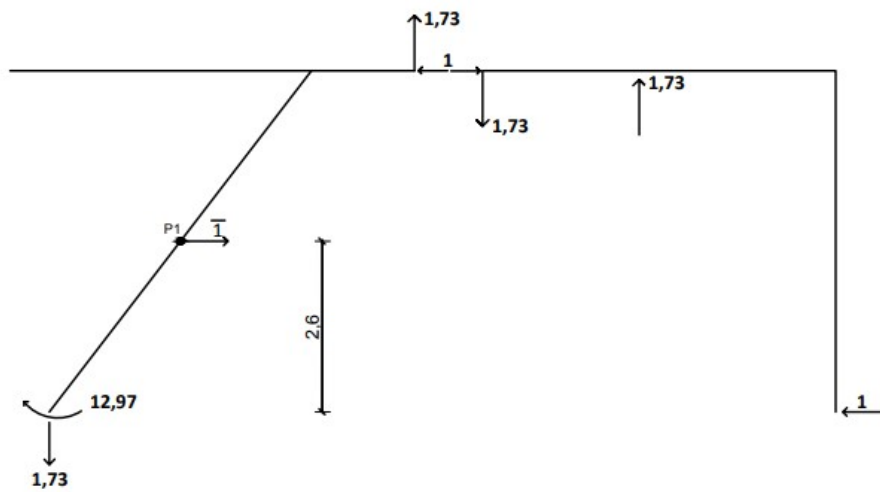
$$k = 9400 \text{ kN/m}$$

OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ

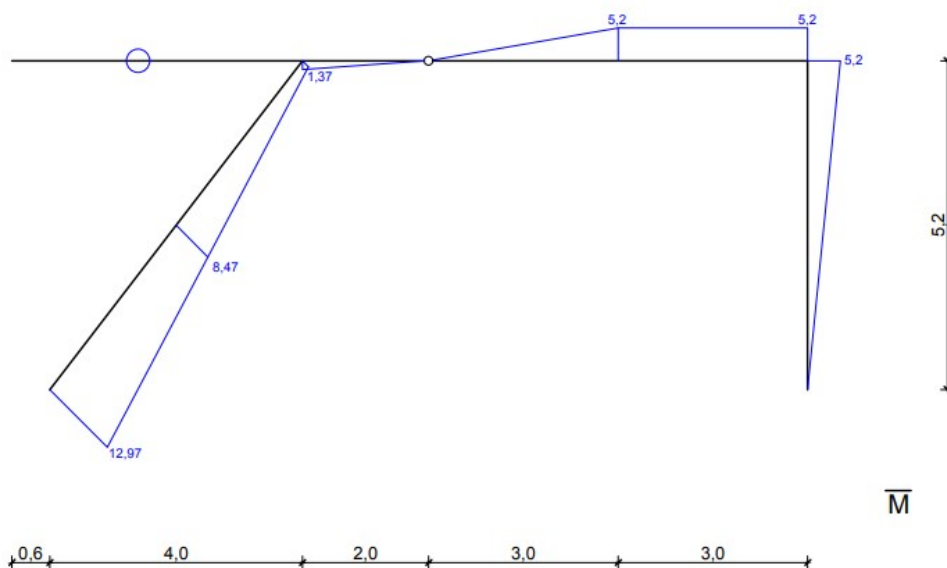
PUNKT P1 – SKŁADOWA POZIOMA



ZESTAWIENIE REAKCJI



WYKRES MOMENTÓW WIRTUALNYCH [m]

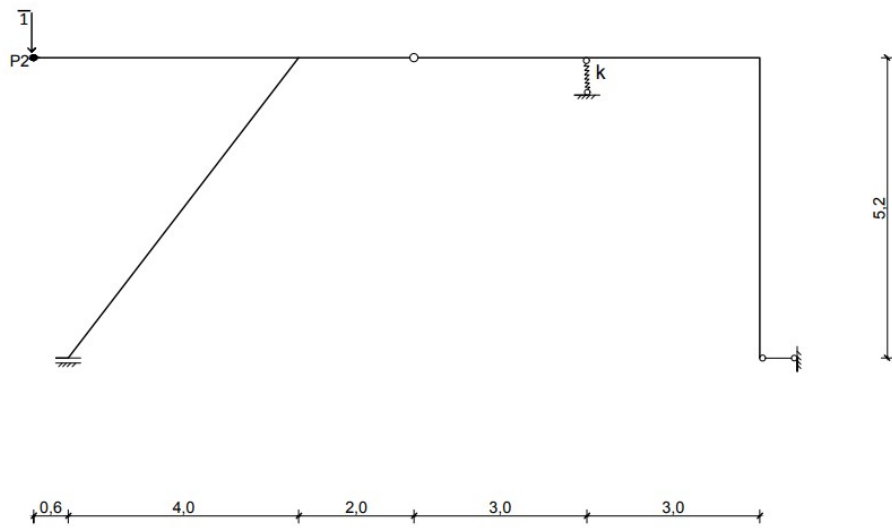


PRZEMIESZCZENIE POZIOME PUNKTU P1 OD SIŁ ZEWNĘTRZNYCH
 (Z POMINIĘCIEM WPŁYWU SIŁ NORMALNYCH I TNĄCYCH)

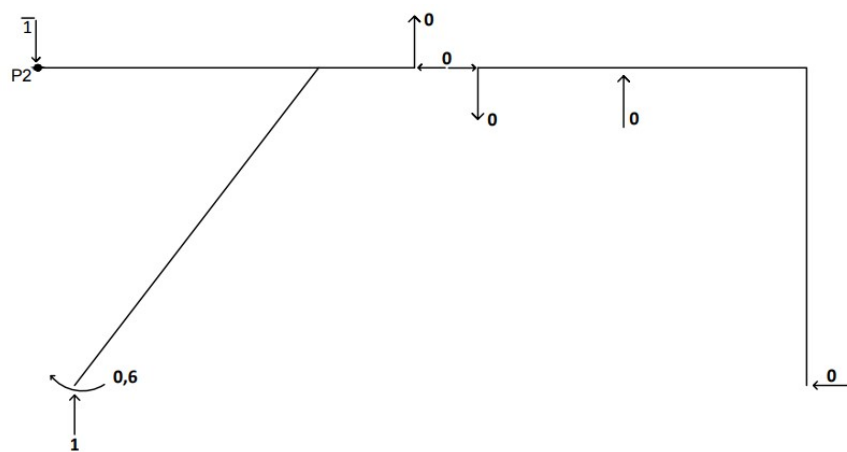
$$v_{P1} = \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx + \sum_{i=1}^m \bar{R} \cdot \frac{R}{k}$$

$$\begin{aligned} v_{P1} = & \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2,6^2}{8} \cdot 3,28 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 12,97 - \frac{1}{2} \cdot 8,47 \right) + \frac{1}{2} \cdot 694,7 \cdot 3,28 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 12,97 - \frac{1}{3} \cdot 8,47 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \cdot 392,3 \cdot 3,28 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 12,97 - \frac{2}{3} \cdot 8,47 \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2,6^2}{8} \cdot 3,28 \cdot \\ & \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 8,47 - \frac{1}{2} \cdot 1,37 \right) + \frac{1}{2} \cdot 392,3 \cdot 3,28 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 8,47 - \frac{1}{3} \cdot 1,37 \right) + \frac{1}{2} \cdot 22,54 \cdot 3,28 \cdot \\ & \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 8,47 - \frac{2}{3} \cdot 1,37 \right) + \frac{1}{2} \cdot 64,83 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 1,37 \right) + \frac{1}{2} \cdot 282,51 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 5,2 \right) - \frac{1}{2} \cdot \\ & \cdot 282,51 \cdot 3 \cdot 5,2 - \frac{1}{2} \cdot 342,51 \cdot 3 \cdot 5,2 + \frac{1}{2} \cdot 342,51 \cdot 5,2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 5,2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 5,2 \cdot \\ & \left. \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 5,2 \right) \right] + \frac{(-74,17) \cdot 1,73}{9400} = \frac{-20403,04}{163774,5} = -0,1382\text{m} = -13,82\text{ cm} \end{aligned}$$

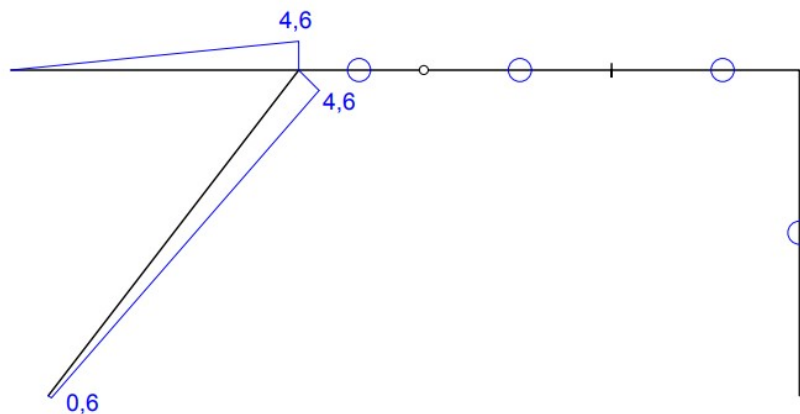
PUNKT P2 – SKŁADOWA PIONOWA



ZESTAWIENIE REAKCJI



WYKRES MOMENTÓW WIRTUALNYCH [m]



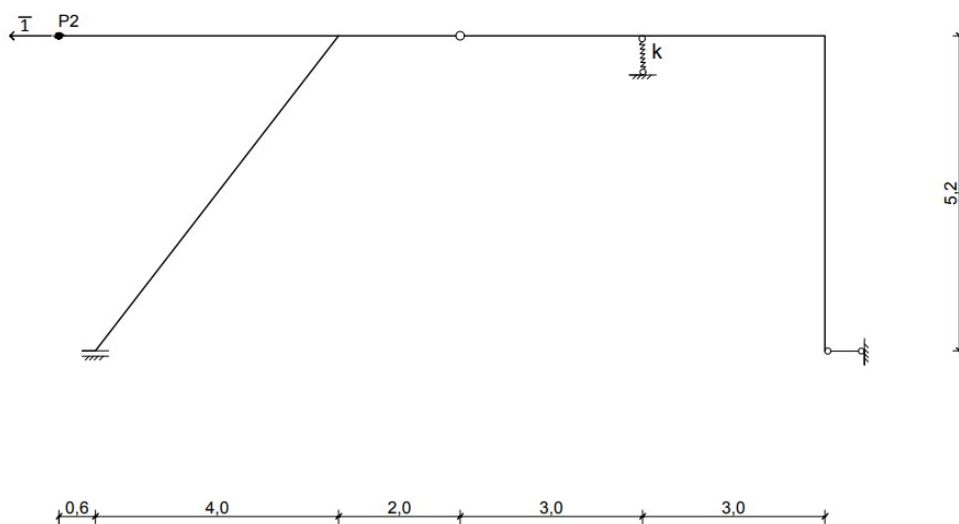
PRZEMIESZCZENIE PIONOWE PUNKTU P2 OD SIŁ ZEWNĘTRZNYCH
 (Z POMINIĘCIEM WPŁYWU SIŁ NORMALNYCH I TNĄCYCH)

$$v_{P2} = \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx + \sum_{i=1}^m \bar{R} \cdot \frac{R}{k}$$

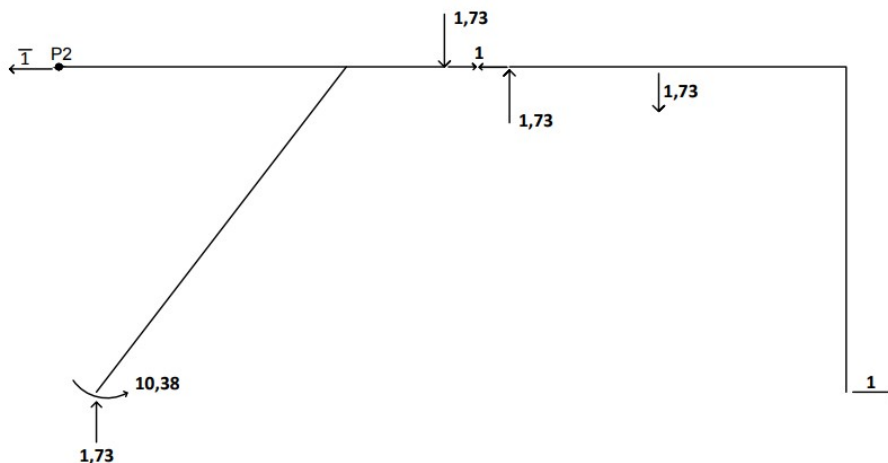
$$v_{P2} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 42,29 \cdot 4,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,6 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 5,2^2}{8} \cdot 6,56 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,6 - \frac{1}{2} \cdot 4,6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 694,7 \cdot 6,56 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 0,6 - \frac{1}{3} \cdot 4,6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 22,54 \cdot 6,56 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 0,6 - \frac{2}{3} \cdot 4,6 \right) \right] + \frac{(-74,17) \cdot 0}{9400} =$$

$$= \frac{-4732,88}{163774,5} = -0,02890 \text{ m} = -2,89 \text{ cm}$$

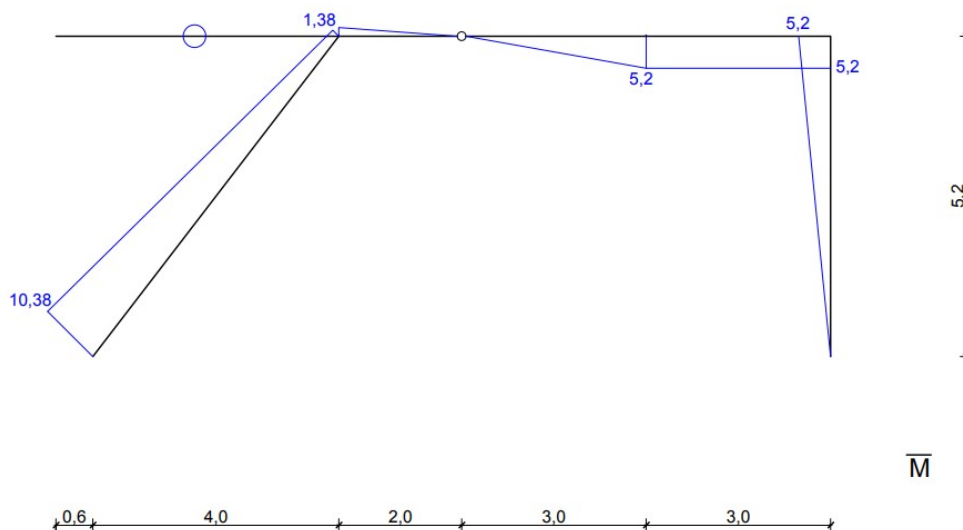
PUNKT P2 – SKŁADOWA POZIOMA



ZESTAWIENIE REAKCJI



WYKRES MOMENTÓW WIRTUALNYCH [m]



PRZEMIESZCZENIE POZIOME PUNKTU P2 OD SIŁ ZEWNĘTRZNYCH
 (Z POMINIĘCIEM WPŁYWU SIŁ NORMALNYCH I TNĄCYCH)

$$h_{P2} = \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx + \sum_{i=1}^m \bar{R} \cdot \frac{R}{k}$$

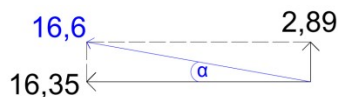
$$\begin{aligned} h_{P2} &= \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 5,2^2}{8} \cdot 6,56 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10,38 + \frac{1}{2} \cdot 1,38 \right) + \frac{1}{2} \cdot 694,7 \cdot 6,56 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 10,38 + \frac{1}{3} \cdot 1,38 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 22,54 \cdot 6,56 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,38 + \frac{1}{3} \cdot 10,38 \right) + \frac{1}{2} \cdot 64,83 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,38 + \frac{1}{2} \cdot 282,51 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 282,51 \cdot 3 \cdot 5,2 + \frac{1}{2} \cdot 342,51 \cdot 3 \cdot 5,2 + \frac{1}{2} \cdot 342,51 \cdot 5,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,2 + \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 5,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,2 \right] + \frac{-74,17 \cdot (-1,73)}{9400} = \\ &= \frac{26775,23}{163774,5} = \mathbf{0,1635m = 16,35cm} \end{aligned}$$

PRZEMIESZCZENIE WYPADKOWE PUNKTU P2

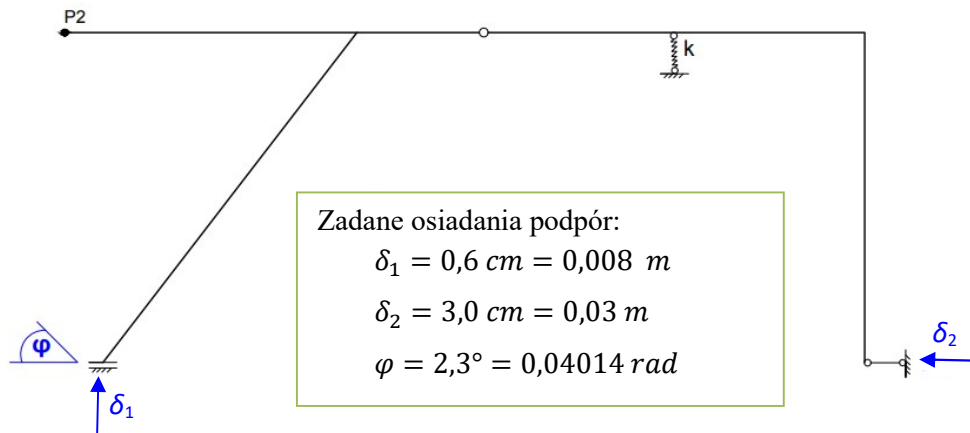
Wartość: $w_{P2} = \sqrt{v_{P2}^2 + h_{P2}^2} = \sqrt{(-2,89)^2 + (16,35)^2} = \mathbf{16,60 \text{ cm}}$

Kierunek: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,89}{16,35} = 0,1768 \rightarrow \alpha = 10,02^\circ$

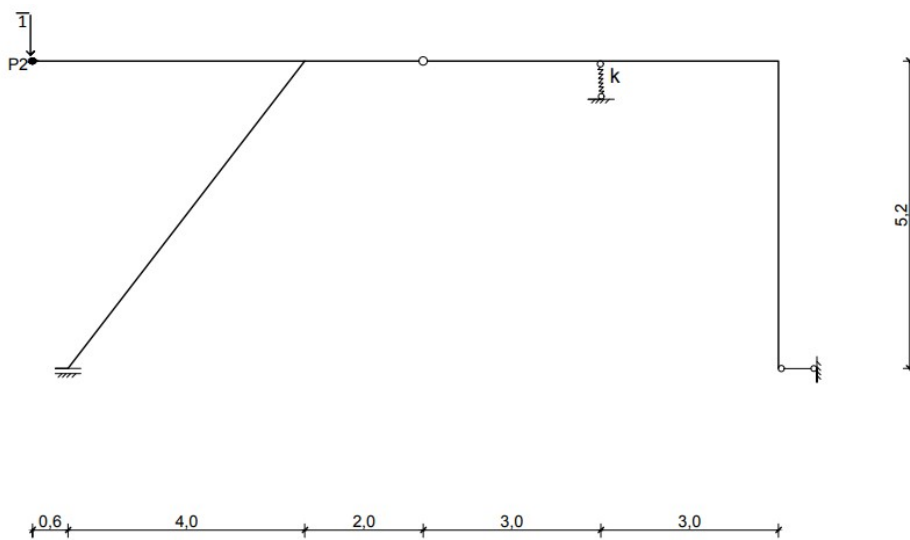
Zwrot – zaznaczony na rysunku:



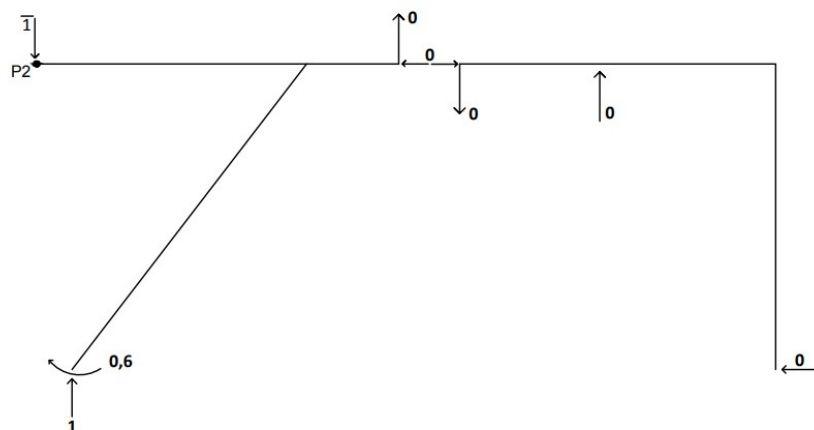
PRZEMIESZCZENIE PUNKTU P2 POD OSIADANIA PODPÓR



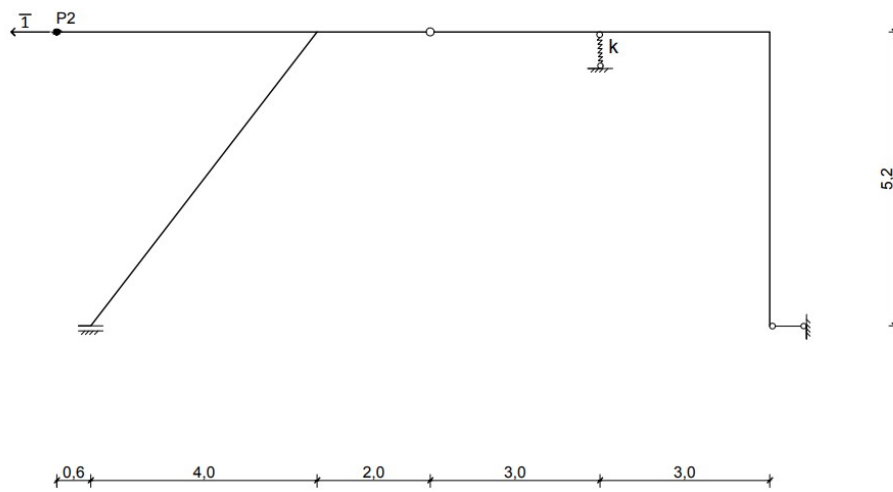
PUNKT P2 – SKŁADOWA PIONOWA



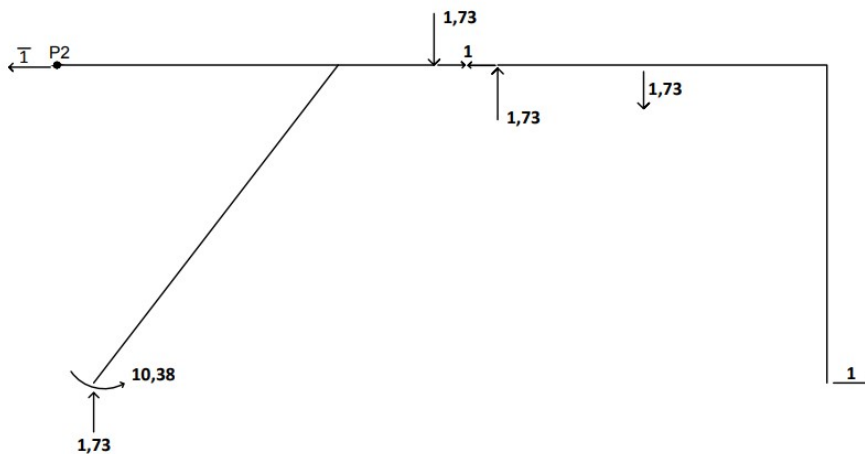
ZESTAWIENIE REAKCJI



PUNKT P2 – SKŁADOWA POZIOMA



ZESTAWIENIE REAKCJI



Przemieszczenie pionowe:

$$v_{P2} = -\sum \bar{R} \cdot \Delta = -(0,03 \cdot 1 + 0,008 \cdot 0 + 0,04014 \cdot 0,6) = -0,05408 \text{ m} = -5,408 \text{ cm}$$

Przemieszczenie poziome:

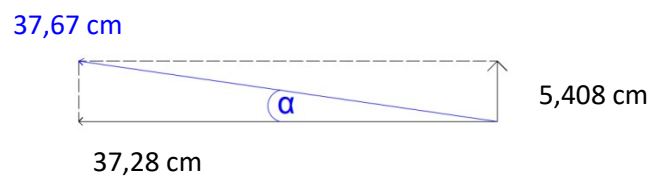
$$h_{P2} = -\sum \bar{R} \cdot \Delta = -(0,03 \cdot 1,73 - 0,008 \cdot 1 - 0,04014 \cdot 10,38) = 0,3728 \text{ m} = 37,28 \text{ cm}$$

PRZEMIESZCZENIE WYPADKOWE PUNKTU P2 OD OSIADANIA PODPÓR

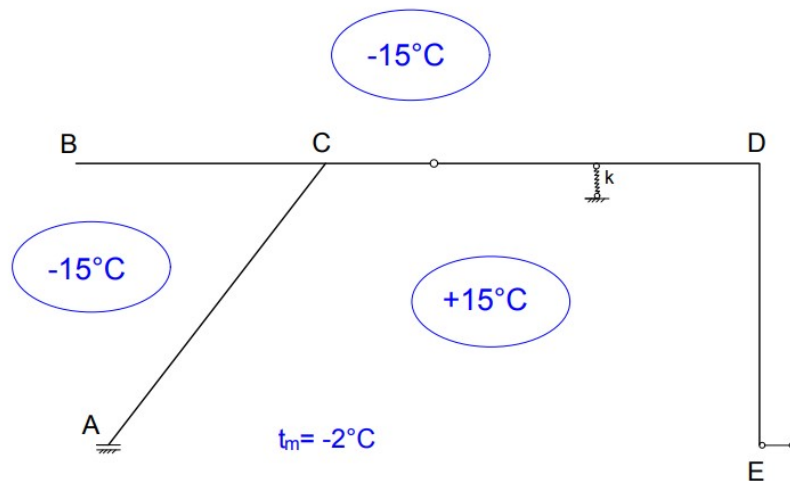
Wartość: $w_{P2} = \sqrt{v_{P2}^2 + h_{P2}^2} = \sqrt{(-5,408)^2 + (37,28)^2} = 37,67 \text{ cm}$

Kierunek: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5,408}{37,28} = 0,1451 \rightarrow \alpha = 8,254^\circ$

Zwrot – zaznaczony na rysunku:



PRZEMIESZCZENIE PIONOWE PUNKTU P2 WYWOŁANE ZMIANĄ TEMPERATUR



	Δt	t_0
BC	0°C	-13°C
AC	30°C	2°C
CD	30°C	2°C
DE	30°C	2°C

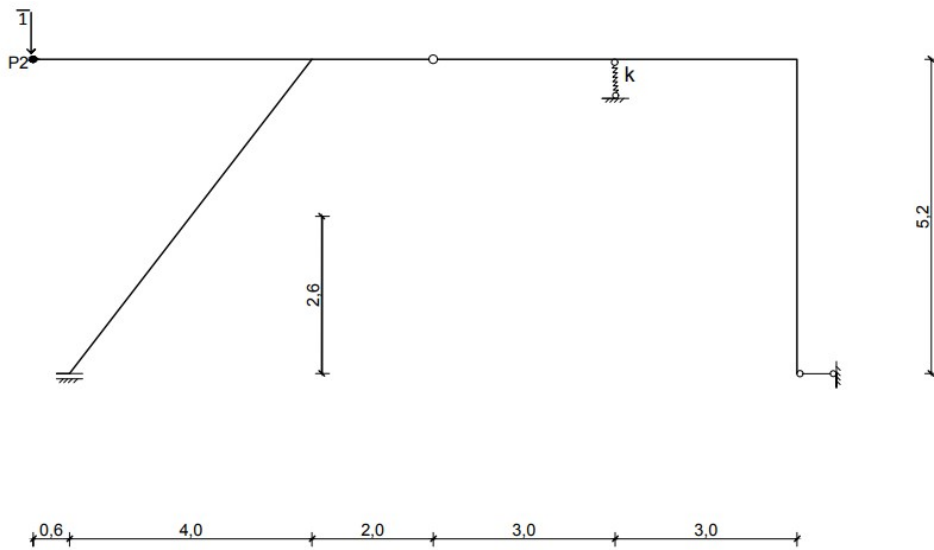
$$t_m = -2^\circ\text{C}$$

$$h = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}$$

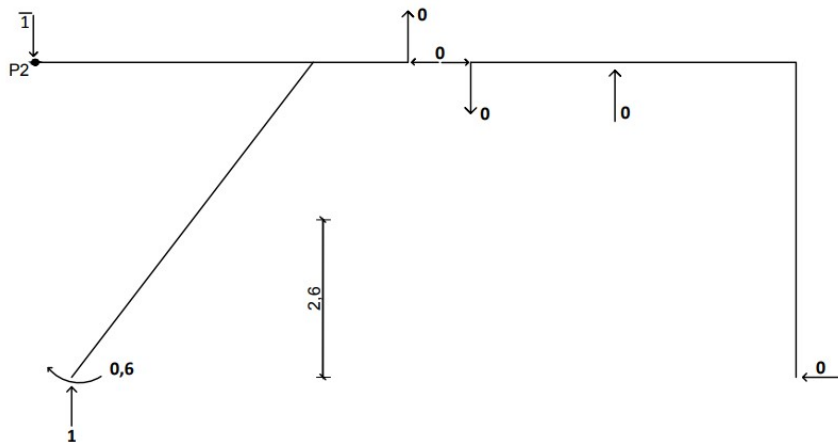
$$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$



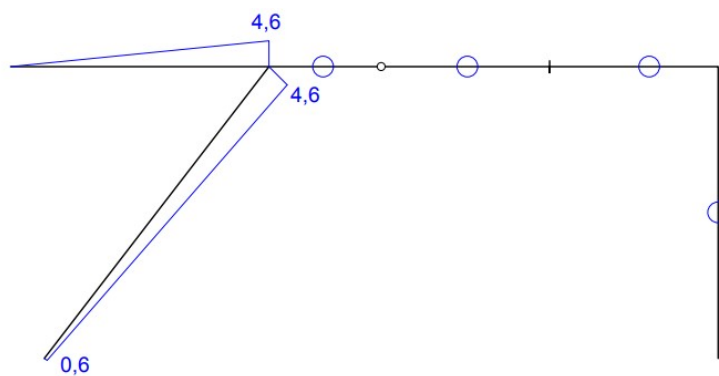
PUNKT P2 – SKŁADOWA PIONOWA



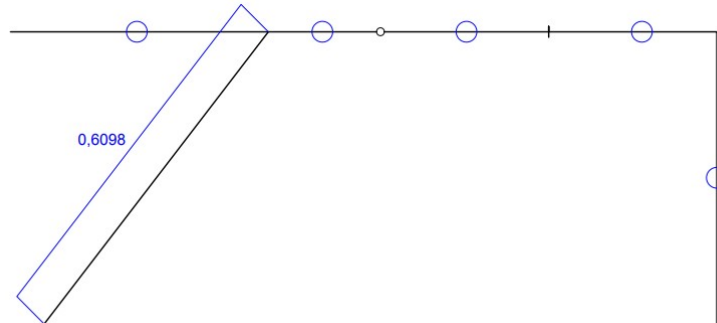
ZESTAWIENIE REAKCJI



WYKRES MOMENTÓW WIRTUALNYCH [m]



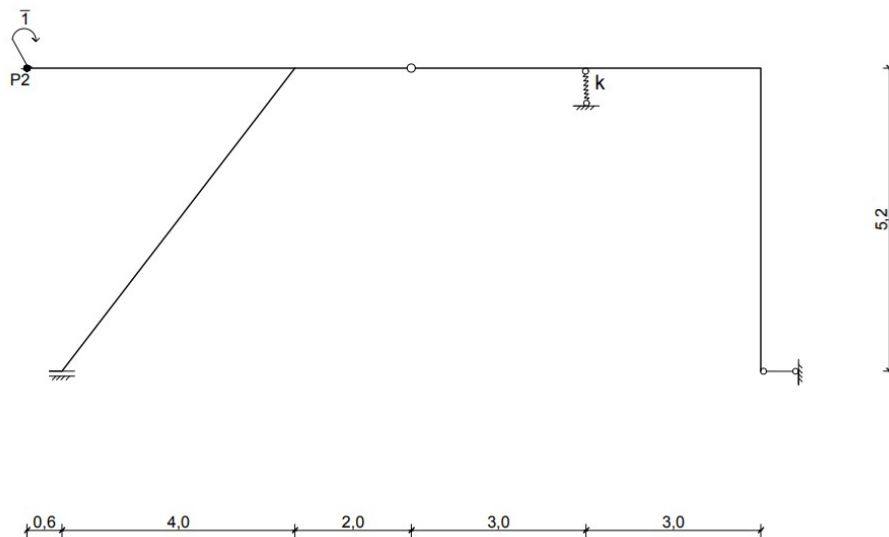
WYKRES SIŁ NORMALNYCH WIRTUALNYCH [-]



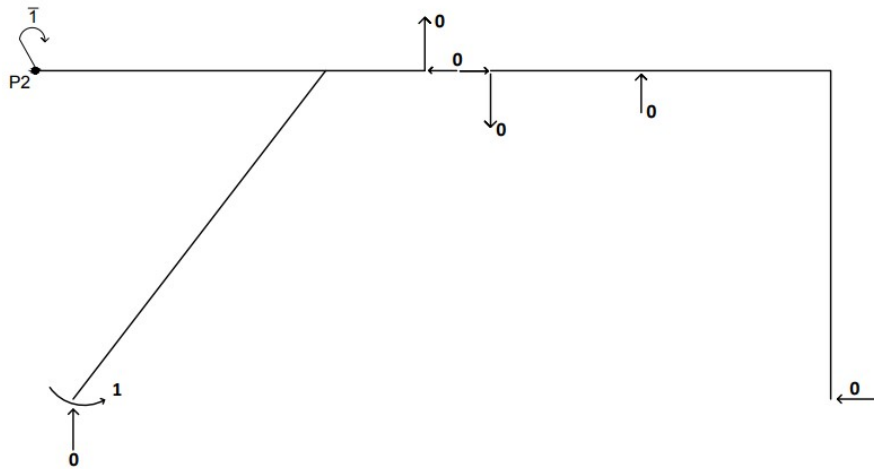
$$v_{P2} = \sum_{j=1}^n \left(\int_{l_j} \alpha_t \bar{N} t_0 dx + \int_{l_j} \alpha_t \bar{M} \frac{\Delta t}{h} dx \right)$$

$$v_{P2} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot (-0,6098 \cdot 6,56 \cdot 2) + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 4,6 \cdot 4,6 \cdot \frac{0}{0,45} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 6,56 \cdot \frac{30}{0,45} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 4,6 \cdot 6,56 \cdot \frac{30}{0,45} \right) \right] = 0,01364 \text{ m} = 1,364 \text{ cm}$$

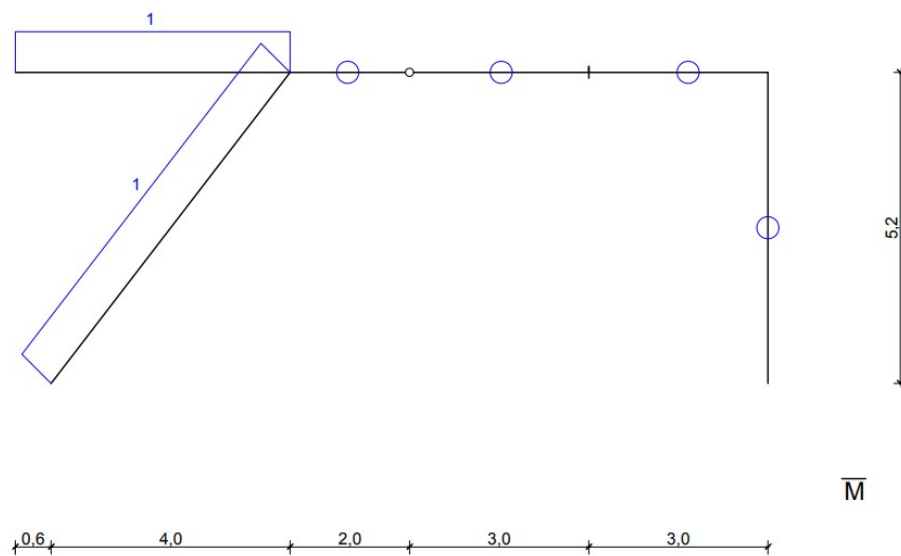
OBRÓT PRZEKROJU W PUNKCIE P2 OD OBCIĄŻENIA SIŁAMI ZEWNĘTRZNYMI



ZESTAWIENIE REAKCJI



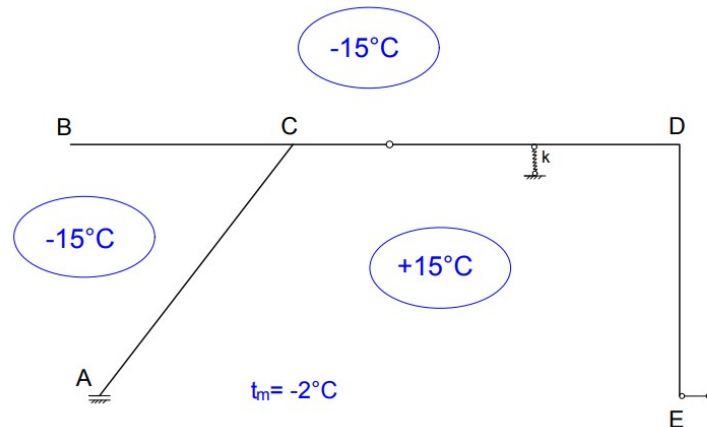
WYKRES MOMENTÓW WIRTUALNYCH [-]



$$\varphi_{P2} = \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx + \sum_{i=1}^m \bar{R} \cdot \frac{R}{k}$$

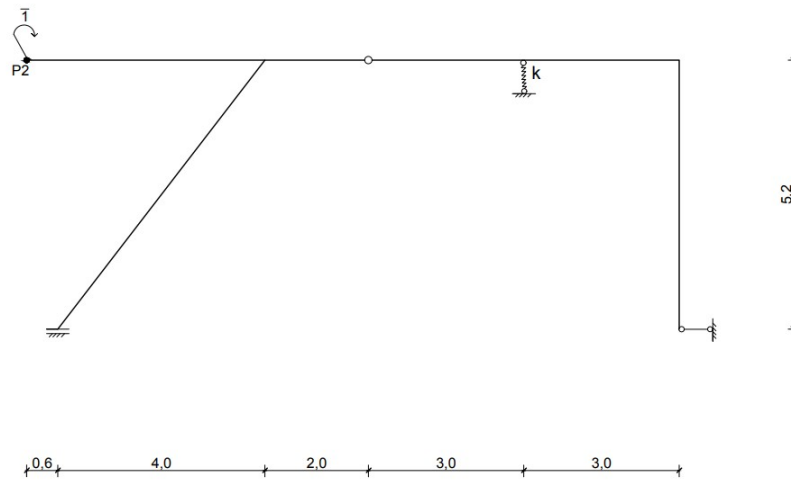
$$\varphi_{P2} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 42,29 \cdot 4,6 \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 5,2^2}{8} \cdot 6,56 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 694,7 \cdot 6,56 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 22,54 \cdot 6,56 \cdot 1 \right] + \frac{(-74,17) \cdot 0}{9400} = \frac{2403,1}{163774,5} = \mathbf{0,001467 \text{ rad}}$$

OBRÓT PRZEKROJU W PUNKCIE P2 WYWOŁANY ZMIANĄ TEMPERATUR

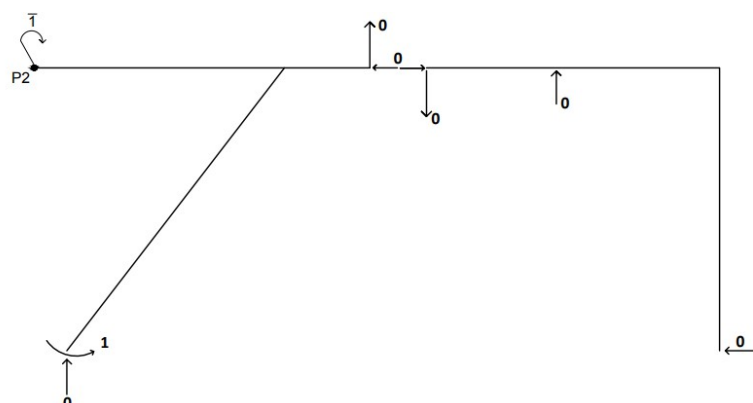


	Δt	t_0
BC	0°C	-13°C
AC	30°C	2°C
CD	30°C	2°C
DE	30°C	2°C

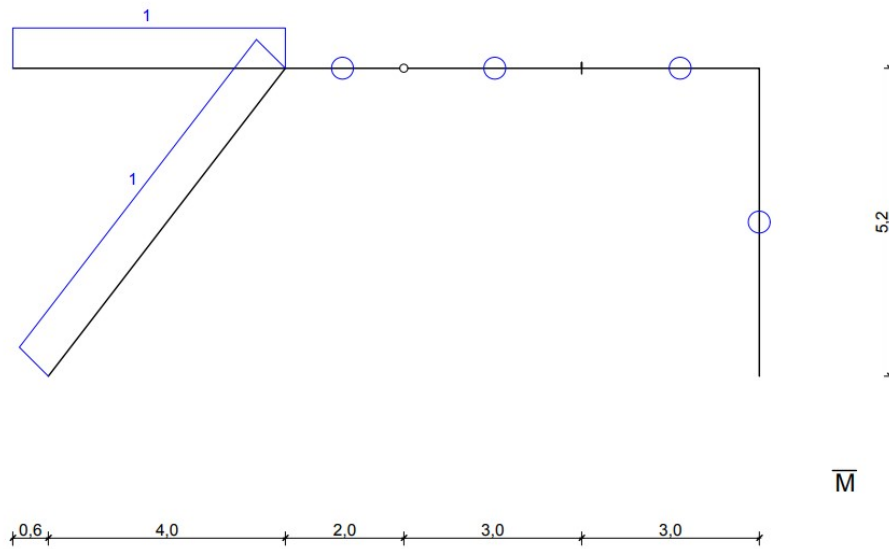
$t_m = -2^\circ\text{C}$
 $h = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}$
 $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$



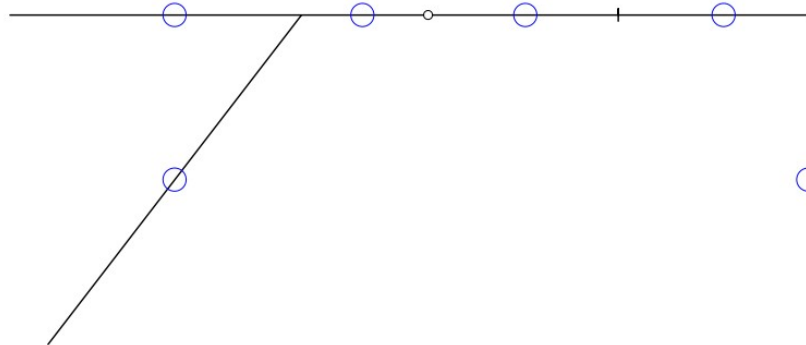
ZESTAWIENIE REAKCJI



WYKRES MOMENTÓW WIRTUALNYCH [-]



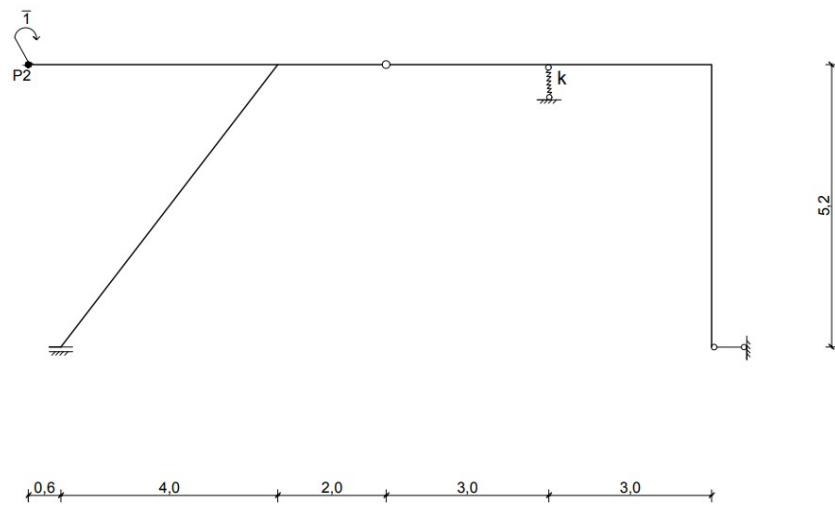
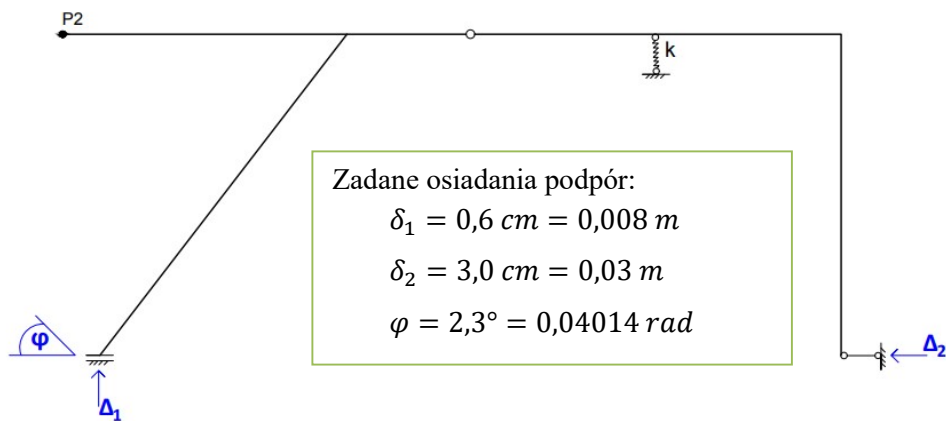
WYKRES SIŁ NORMALNYCH WIRTUALNYCH [-]



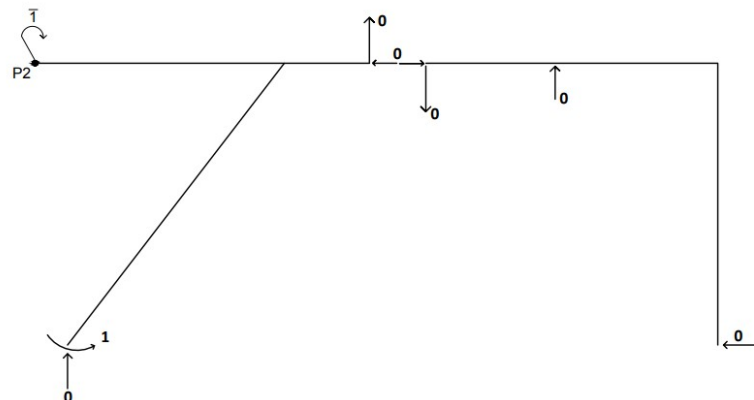
$$\varphi_{P2} = \sum_{j=1}^n \left(\int_{l_j} \alpha_t \bar{N} t_0 dx + \int_{l_j} \alpha_t \bar{M} \frac{\Delta t}{h} dx \right)$$

$$\varphi_{P2} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \left[\left(1 \cdot 4,5 \cdot \frac{0}{0,45} \right) - \left(1 \cdot 6,56 \cdot \frac{30}{0,45} \right) \right] = -0,005248 \text{ rad}$$

OBRÓT PRZEKROJU W PUNKCIE P2 OD OSIADANIA PODPÓR



ZESTAWIENIE REAKCJI



$$\varphi_{P2} = - \sum \bar{R} \cdot \Delta = -(0,03 \cdot 0 + 0,008 \cdot 0 - 0,04014 \cdot 1) = 0,04014 \text{ rad}$$