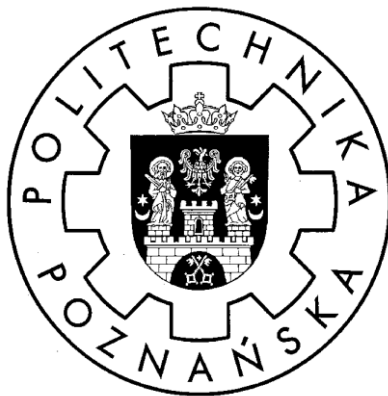


POLITECHNIKA POZNAŃSKA

INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI



ĆWICZENIE NR 2

METODA SIŁ

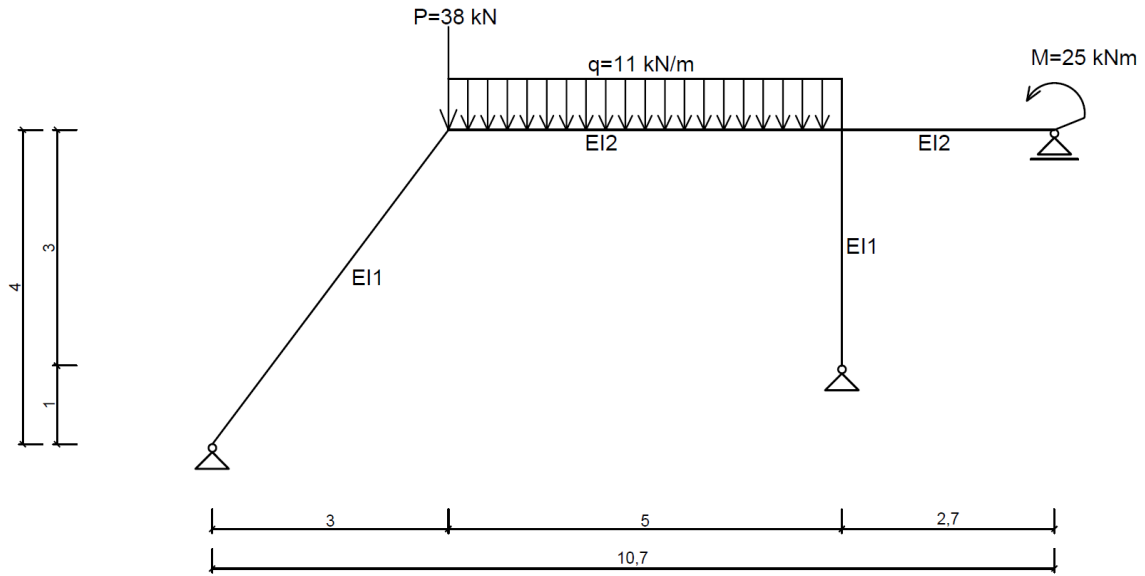
Piotr Stiller

sem. IV

Rozwiązać zadanie metodą sił, wykonać sprawdzenie kinematyczne.

1. Analiza układu

Schemat układu:



Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n = w - 3 \cdot t$$

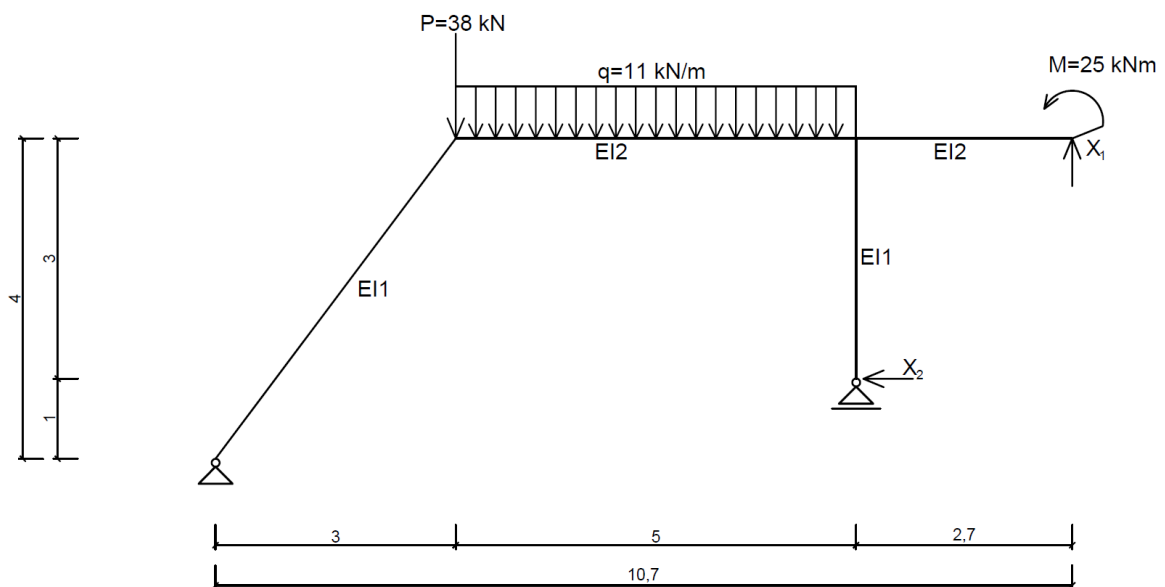
$$t = 1$$

$$w = 2 + 2 + 1 = 5$$

$$n = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

Rama jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna.

2. Układ podstawowy



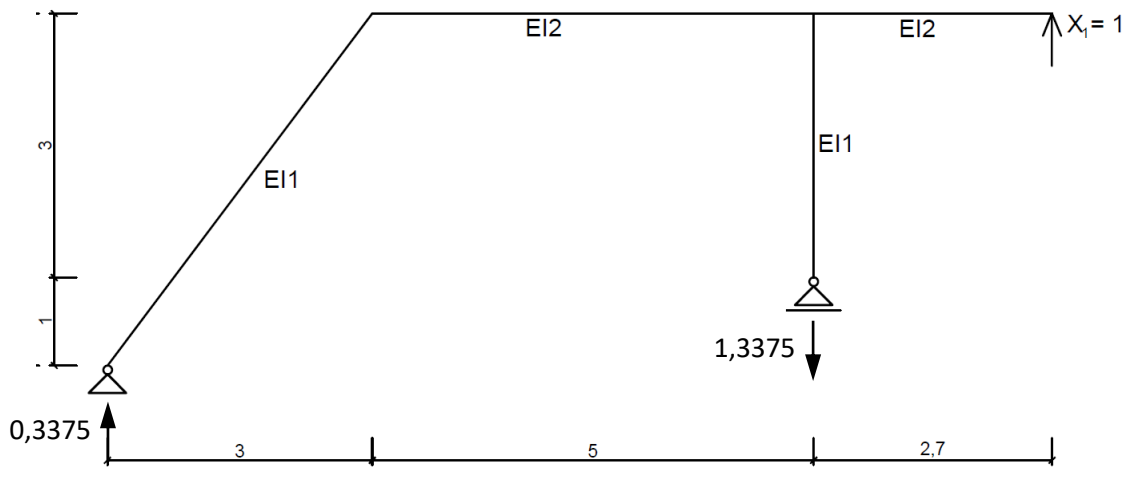
3. Przyjęcie przekrojów prętów

- Moduł Young'a: $E = 205 \text{ GPa}$;
- Przekrój $\boxed{1}$ – I 140: $I_1 = 573,0 \text{ cm}^4$;
 $EI_1 = 205 \cdot 10^6 \cdot 573,0 \cdot 10^{-8} = 1174,7 \text{ kNm}^2$;
- Przekrój $\boxed{2}$ – I 200: $I_2 = 2140,0 \text{ cm}^4$;
 $EI_2 = 205 \cdot 10^6 \cdot 2140,0 \cdot 10^{-8} = 4387,0 \text{ kNm}^2$;
- do rozwiązania zadania przyjęto:

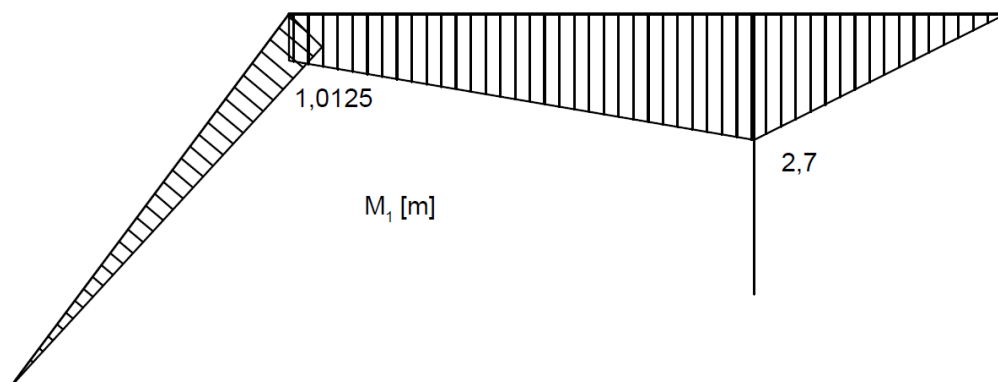
$$EI_1 = EI$$

$$EI_2 = 3,7346EI$$

4. Stan $X_1 = 1$



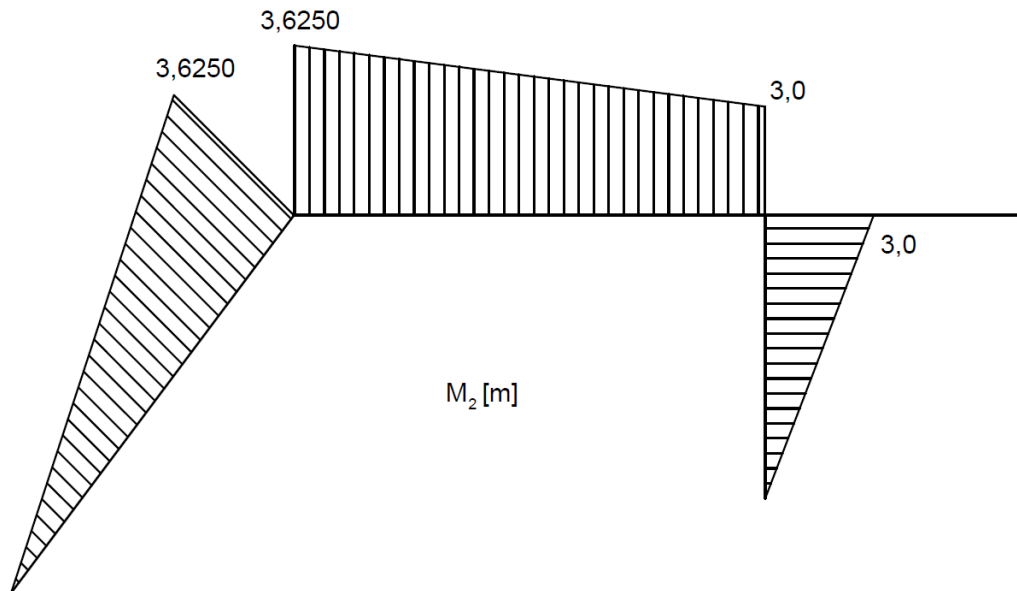
Wykres momentów zginających:



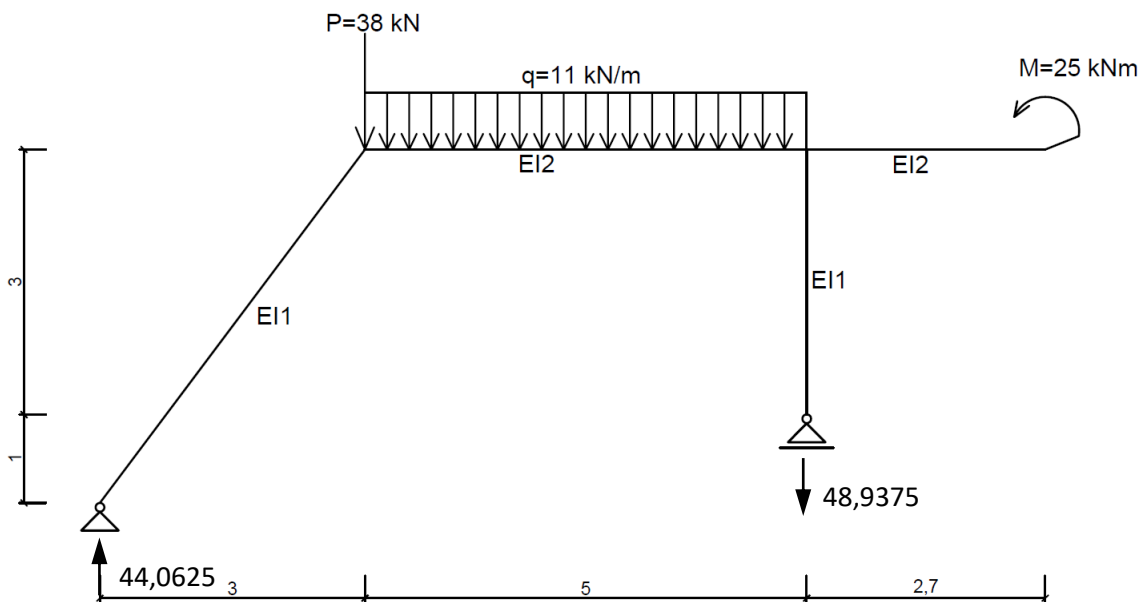
5. Stan $X_2 = 1$



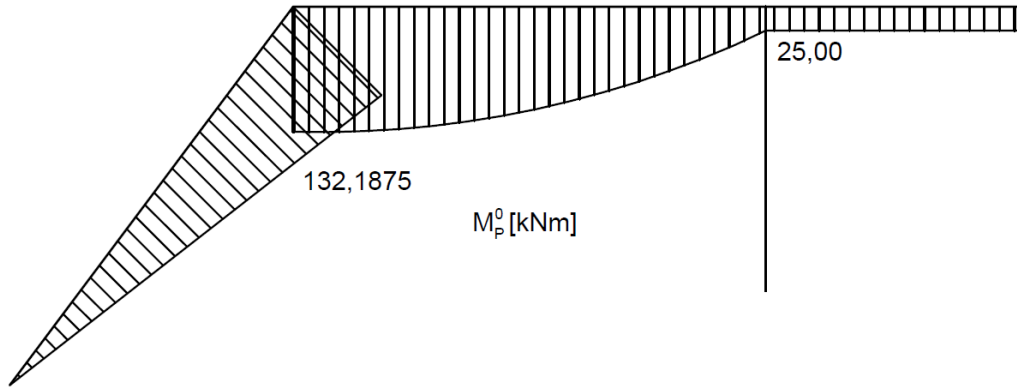
Wykres momentów zginających:



6. Stan „P”



Wykres momentów zginających:



7. Układ równań kanonicznych

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \int_s \frac{M_i M_j}{EI} ds$$

$$\delta_{iP} = \int_s \frac{M_i M_P}{EI} ds$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_s \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,0125 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,0125}{EI_1} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,0125 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,0125 + \frac{1}{3} \cdot 2,7\right) + \frac{1}{2} \cdot 2,7 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2,7 + \frac{1}{3} \cdot 1,0125\right) + \frac{1}{2} \cdot 2,7 \cdot 2,7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,7}{EI_2} \\ &= \frac{1,7086}{EI_1} + \frac{18,4148}{EI_2} = \frac{1,7086}{EI} + \frac{18,4148}{3,7346EI} = \frac{1,7086}{EI} + \frac{6,6877}{EI} = \frac{8,3963}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int_s \frac{M_2 M_2}{EI} ds \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 3,625 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,625 + \frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot 3,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,0}{EI_1} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3,0 + \frac{1}{3} \cdot 3,625\right) + \frac{1}{2} \cdot 3,625 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3,625 + \frac{1}{3} \cdot 3,0\right)}{EI_2} \\ &= \frac{30,9010}{EI_1} + \frac{55,0260}{EI_2} = \frac{21,901}{EI} + \frac{55,0260}{3,7346EI} = \frac{30,9010}{EI} + \frac{14,7341}{EI} = \frac{45,6351}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{12} = \delta_{21} &= \int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds \\
&= -\frac{\frac{1}{2} \cdot 1,0125 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,625}{EI_1} \\
&\quad - \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,0125 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3,625 + \frac{1}{3} \cdot 3,0\right) + \frac{1}{2} \cdot 2,7 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3,0 + \frac{1}{3} \cdot 3,625\right)}{EI_2} \\
&= -\frac{6,1172}{EI_1} - \frac{30,3047}{EI_2} = -\frac{6,1172}{EI} - \frac{30,3047}{3,7346EI} = -\frac{6,1172}{EI} - \frac{8,1147}{EI} = -\frac{14,2318}{EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{1P} &= \int_s \frac{M_1 M_P}{EI} ds = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,0125 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 132,1875}{EI_1} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2,7 + \frac{1}{3} \cdot 1,0125\right) + \frac{1}{2} \cdot 132,1875 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,0125 + \frac{1}{3} \cdot 2,7\right)}{EI_2} \\
&\quad + \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{11 \cdot 5^2}{8} \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1,0125 + \frac{1}{2} \cdot 2,7\right) + 25 \cdot 2,7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,7}{EI_2} = \frac{223,0664}{EI_1} + \frac{1035,5273}{EI_2} \\
&= \frac{223,0664}{EI} + \frac{1035,5273}{3,7346EI} = \frac{223,0664}{EI} + \frac{256,4940}{EI} = \frac{479,5604}{EI}
\end{aligned}$$

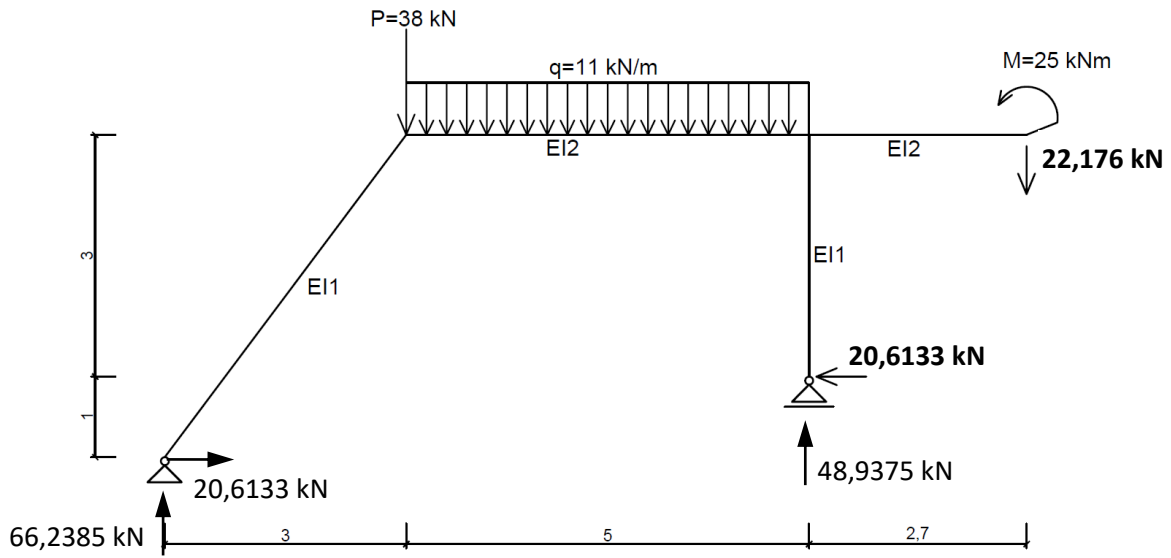
$$\begin{aligned}
\delta_{2P} &= \int_s \frac{M_2 M_P}{EI} ds = -\frac{\frac{1}{2} \cdot 3,625 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 132,1875}{EI_1} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3,0 + \frac{1}{3} \cdot 3,625\right)}{EI_2} \\
&\quad - \frac{\frac{1}{2} \cdot 132,1875 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3,625 + \frac{1}{3} \cdot 3,0\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{11 \cdot 5^2}{8} \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3,0 + \frac{1}{2} \cdot 3,625\right)}{EI_2} \\
&= -\frac{798,6328}{EI_1} - \frac{1709,1797}{EI_2} = -\frac{798,6328}{EI} - \frac{1709,1797}{3,7346EI} = -\frac{798,6328}{EI} - \frac{457,6607}{EI} \\
&= -\frac{1256,2935}{EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{8,3963}{EI} X_1 - \frac{14,2318}{EI} X_2 + \frac{479,5604}{EI} = 0 \\ -\frac{14,2318}{EI} X_1 + \frac{45,6351}{EI} X_2 - \frac{1256,2935}{EI} = 0 \end{cases}$$

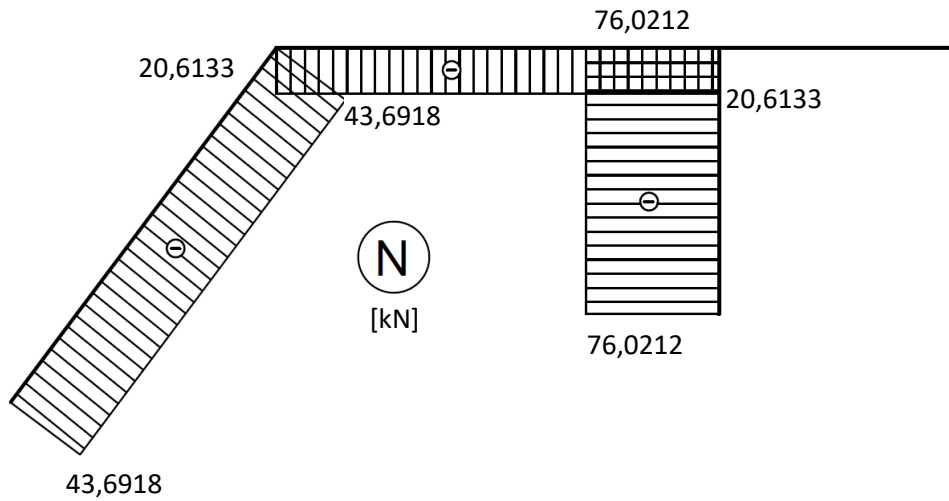
$$\begin{cases} X_1 = -22,1760 \text{ kN} \\ X_2 = 20,6133 \text{ kN} \end{cases}$$

8. Wyznaczenie sił wewnętrznych

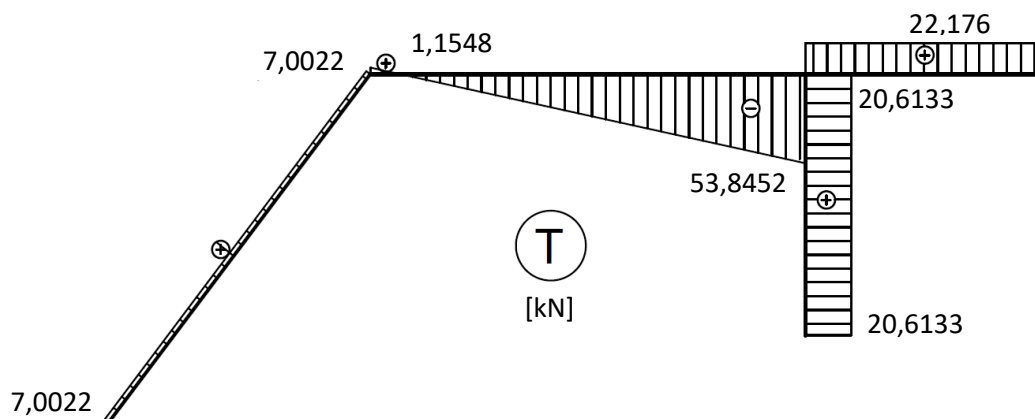
Układ obciążeń:



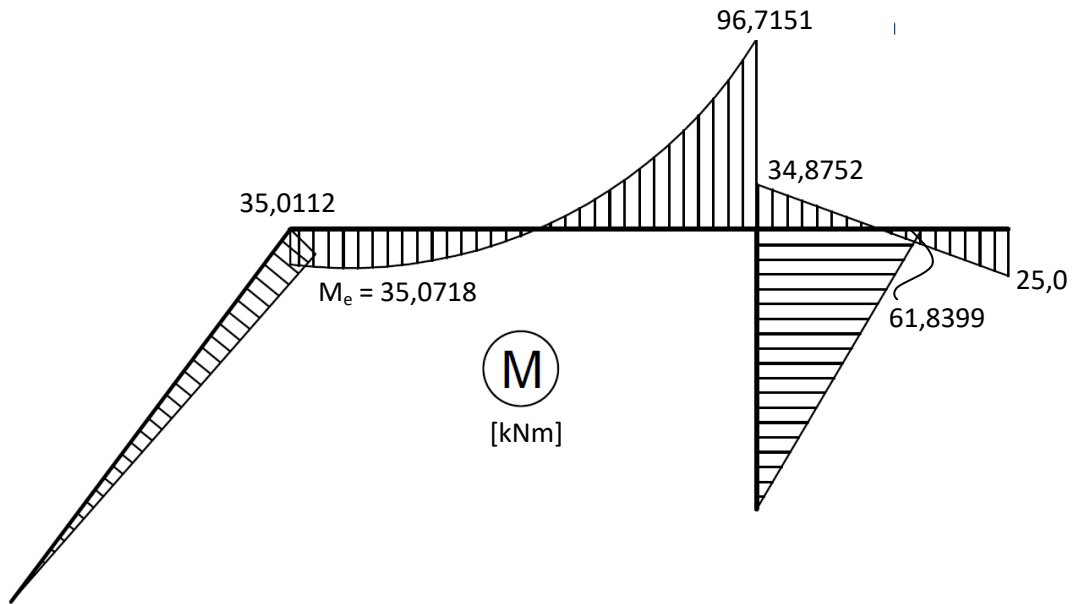
Wykres sił normalnych w prętach:



Wykres sił tnących w prętach:



Wykres momentów zginających:



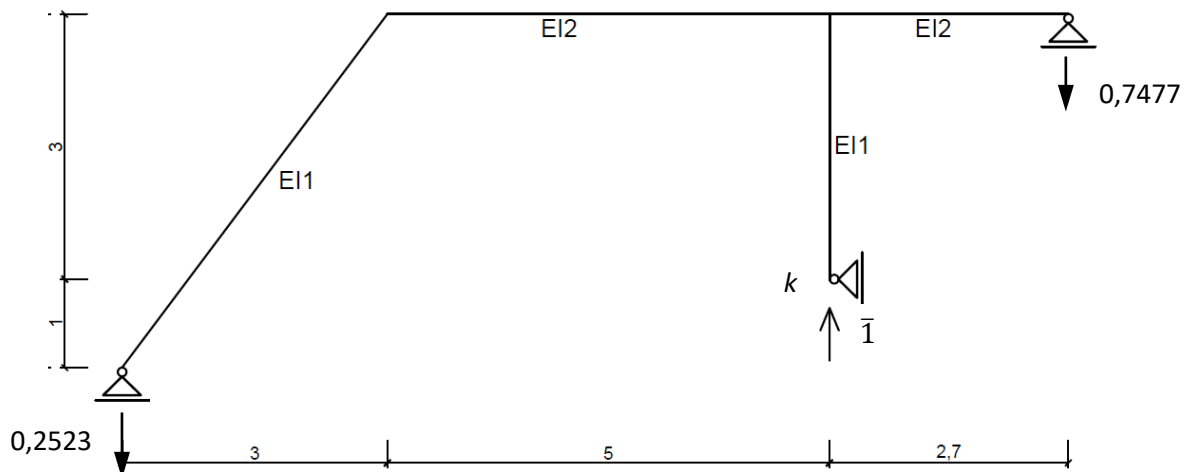
9. Sprawdzenie kinematyczne

Jako sprawdzenie kinematyczne obliczone zostanie przemieszczenie pionowe w punkcie k . Wykorzystane zostanie równanie pracy wirtualnej oraz twierdzenie redukcyjne.

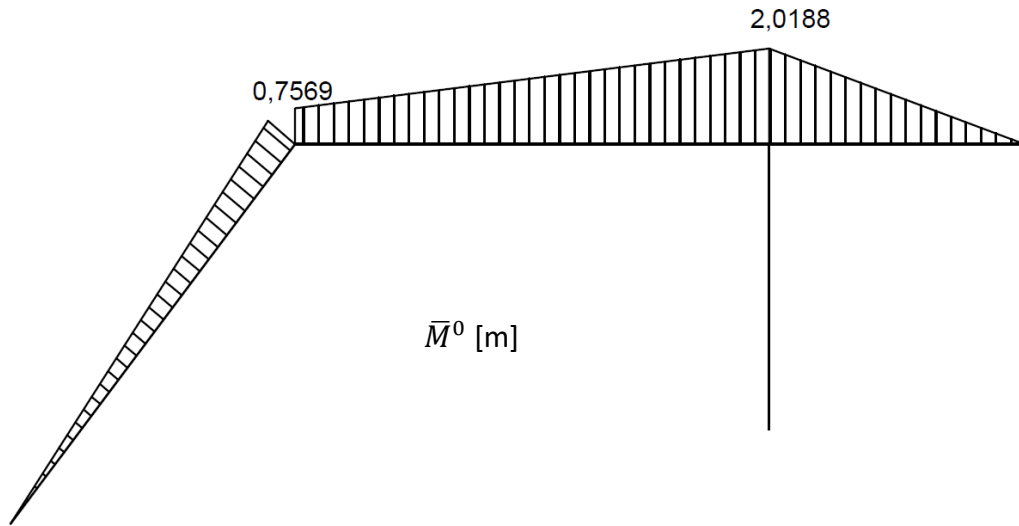
$$\delta_k = \int_s \frac{\bar{M}^0 \cdot M}{EI} ds$$

Wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego (\bar{M}^0) wyznaczamy przyjmując do obliczeń układ statyczny, spełniający warunki stawiane układowi podstawowemu metody sił (może być taki sam jak we wcześniejszych obliczeniach, ale zaleca się przyjąć inny).

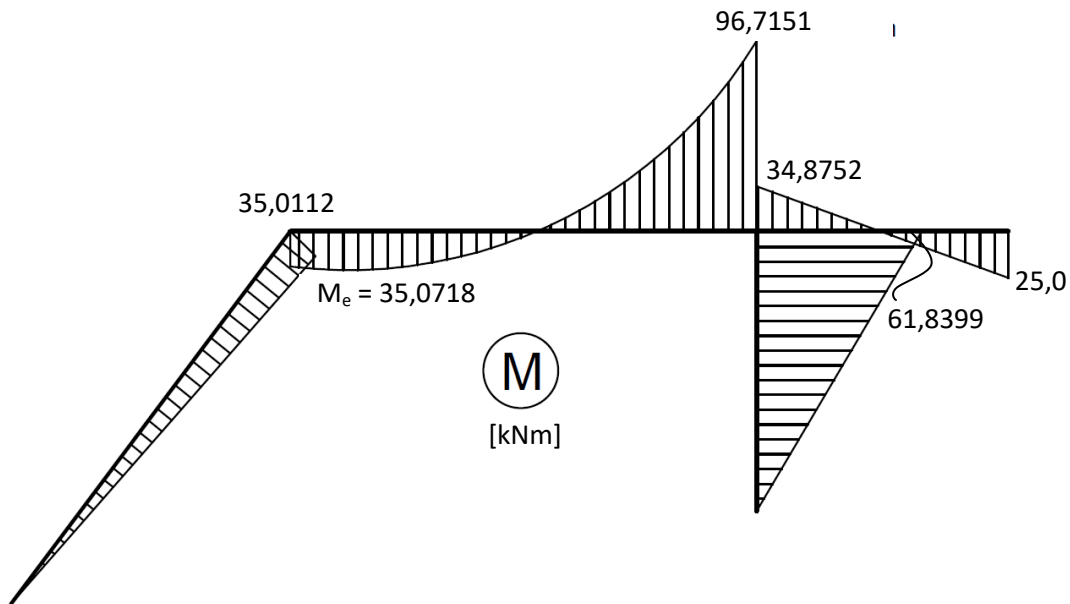
Przyjęty schemat i obciążenie:



Wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego:



Wykres momentów zginających od obciążenia rzeczywistego:



$$\begin{aligned} \delta_k &= \int_s \frac{\bar{M}^0 \cdot M}{EI} ds = -\frac{\frac{1}{2} \cdot 0,7569 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 35,0112}{EI_1} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,7569 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 96,7151 - \frac{2}{3} \cdot 35,0112\right) + \frac{1}{2} \cdot 2,0188 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 96,7151 - \frac{1}{3} \cdot 35,0112\right)}{EI_2} \\ &- \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{11 \cdot 5^2}{8} \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,7569 + \frac{1}{2} \cdot 2,0188\right)}{EI_2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,0188 \cdot 2,7 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 34,8752 - \frac{1}{3} \cdot 25,0\right)}{EI_2} \\ &= -\frac{44,1666}{EI_1} + \frac{164,9795}{EI_2} = -\frac{19,9515}{EI} + \frac{164,9795}{3,7346EI} = -\frac{44,1666}{EI} + \frac{44,1759}{EI} = \frac{0,0093}{EI} \end{aligned}$$

$$|\delta_k| < \frac{1}{EI} \approx 0$$

$$|\delta_k| \approx 0$$