

ĆWICZENIE NR 1

METODA PRZEMIESZCZEŃ

Termin oddania: 21.04.2023

Data	Uwagi sprawdzającego	Podpis

Dla zadanej **ramy** (schemat nr **8**) należy:

1. Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego **obciążenia siłami zewnętrznymi**, wykonać kontrolę kinematyczną oraz statyczną. Sprawdzić naprężenia w obu grupach przekrojów I_1 i I_2 , porównać je z wartościami dopuszczalnymi naprężeń (f_y) i sformułować wnioski (w przypadku niespełnienia warunku nośności, obliczeń nie trzeba powtarzać).
2. Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego **osiadania podpór**, wykonać kontrolę kinematyczną oraz statyczną.

Dla zadanej **belki** (schemat nr **1**) należy:

1. Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego obciążenia siłami zewnętrznymi.
2. Korzystając z metody przemieszczeń w ujęciu macierzowym obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego obciążenia siłami zewnętrznymi.

W obliczeniach przyjmując: $E = 210 \text{ GPa}$, $f_y = 235 \text{ MPa}$.

UWAGA!

Obciążenie przęsłowe:

- obciążenie równomiernie rozłożone q działa na całej długości pręta, prostopadłe do osi pręta;
- siła P jest prostopadła do osi pręta, przyłożona w połowie długości pręta;
- moment skupiony M przyłożony jest w połowie długości pręta.

Obciążenie przęsłowe i węzłowe – zwroty:

- siły skupione, obciążenie równomiernie rozłożone oraz liniowe osiadania podpór – wartość ujemna oznacza zwrot przeciwny do osi układu współrzędnych na schemacie;
- momenty skupione oraz osiadania kątowe – wartość dodatnia oznacza zwrot w prawo, ujemna – w lewo.

DANE DLA RAMY:

Nr schematu: **8**

Pręt nr 1				
L [m]	przekrój	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
3	I 180 PE	-15	0	0

Pręt nr 2				
L [m]	przekrój	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
5,5	I 180 PE	0	0	0

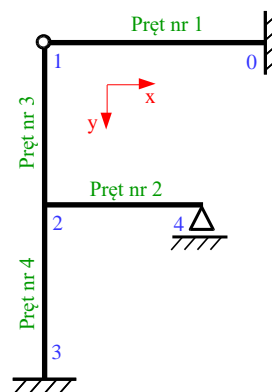
Pręt nr 3				
L [m]	przekrój	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
5	I 200 HEA	0	-40	0

Pręt nr 4				
L [m]	przekrój	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
3,5	I 200 HEA	0	0	43

Obciążenie węzłowe	
siła skupiona P_x w węźle 2:	-10 kN
moment skupiony w węźle 2:	-40 kNm

Osiadanie podpór	
osiadanie kątowe węzła nr 0:	-2 [°]
osiadanie pionowe węzła nr 3:	-0,9 [cm]
osiadanie pionowe węzła nr 0:	-1,4 [cm]
osiadanie poziome węzła nr 0:	1,8 [cm]

Schemat 8:



DANE DLA BELKI:

Nr schematu: **1**

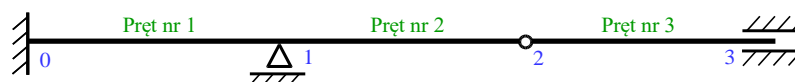
Pręt nr 1				
L [m]	przekrój	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
6	I 180 HEA	0	-40	0

Pręt nr 2				
L [m]	przekrój	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
4	I 160 PE	8	0	0

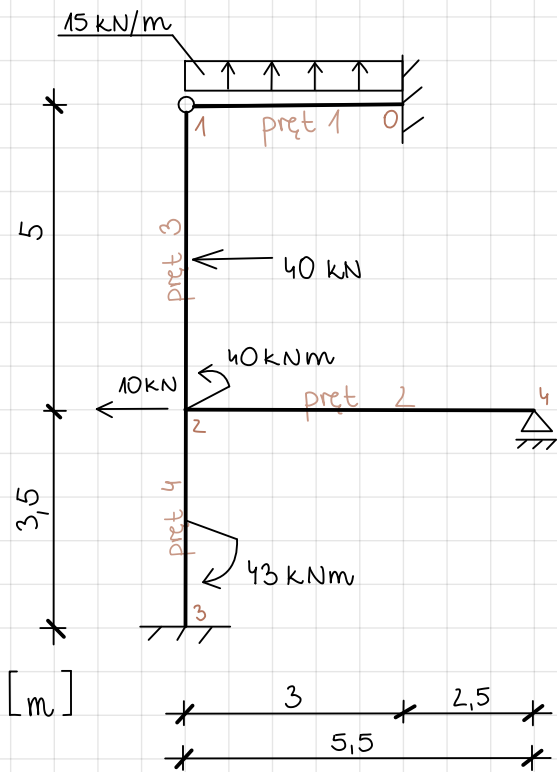
Pręt nr 3				
L [m]	przekrój	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
5	I 160 PE	0	-24	0

Obciążenie węzłowe	
siła skupiona w węźle 2:	-10 kN
moment skupiony w węźle 1:	50 kNm

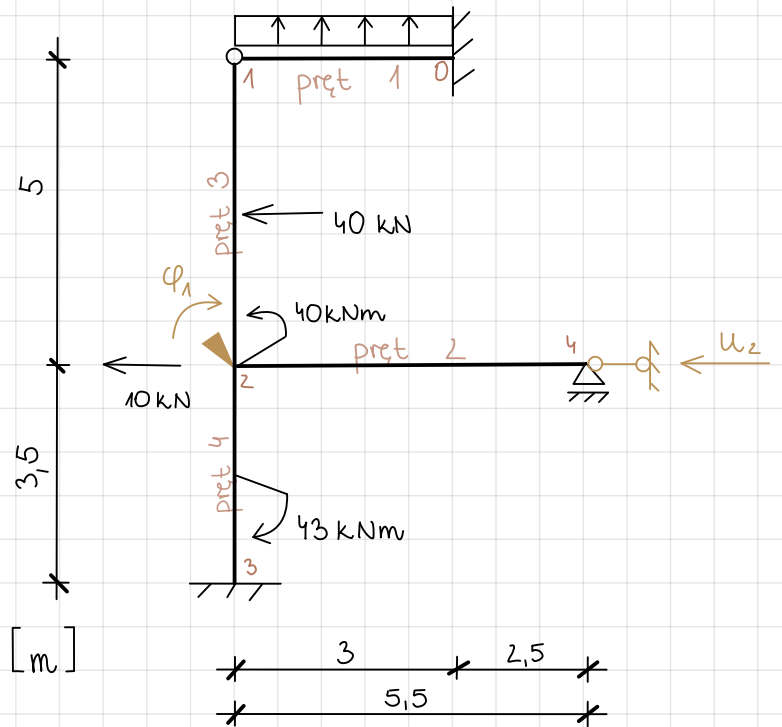
Schemat 1:



schemat 8



układ podstawowy



wstępne przyjęcie przekrojów:

$$\sum \varphi = 1$$

$$\sum u = 1$$

$$SG-N = 1+1 = 2$$

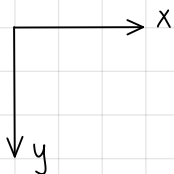
przekrój dla prętów 1,2: I 180 PE

$$I_1 = 1317 \text{ cm}^4$$

przekrój dla prętów 3,4: I 200 HEA

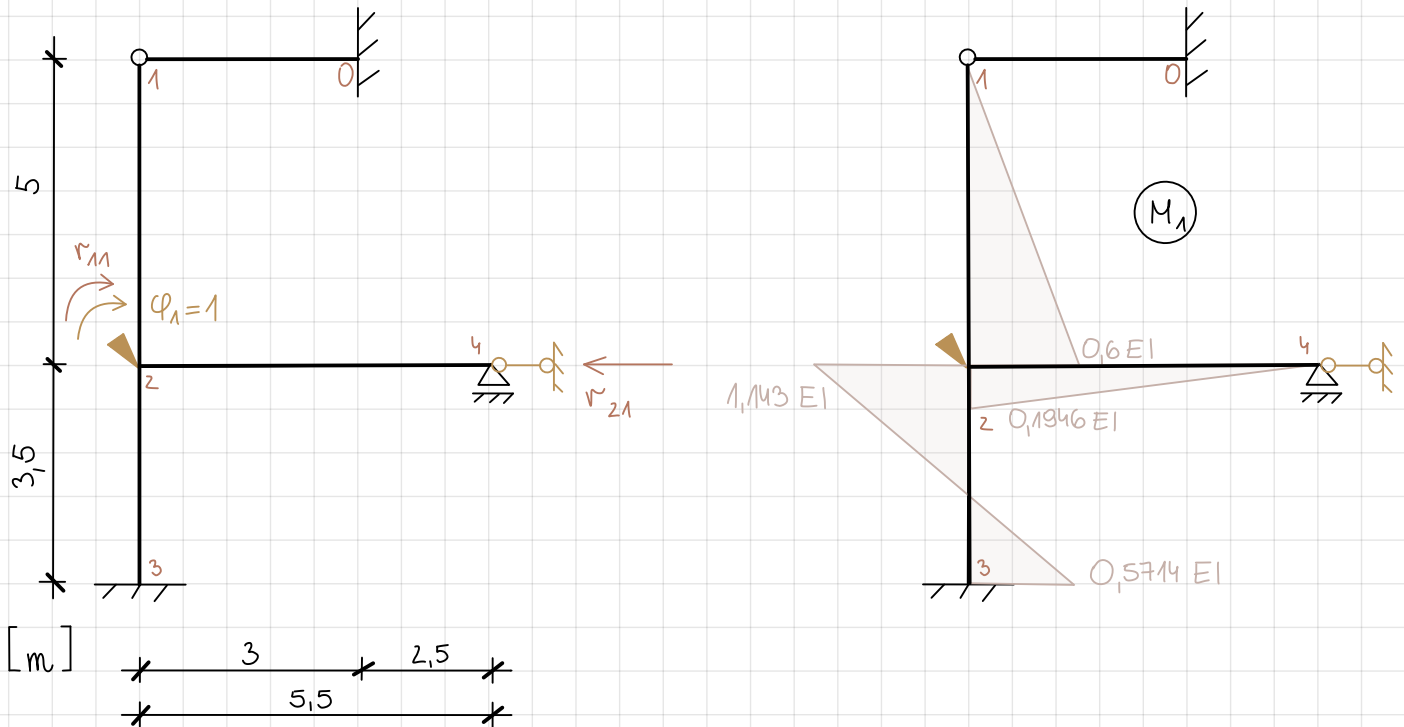
$$I_2 = 3692 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1317}{3692} = 0,3567 \quad I_1 = 0,3567 I_2$$



$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot u_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot u_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

stan $\varphi_1 = 1$



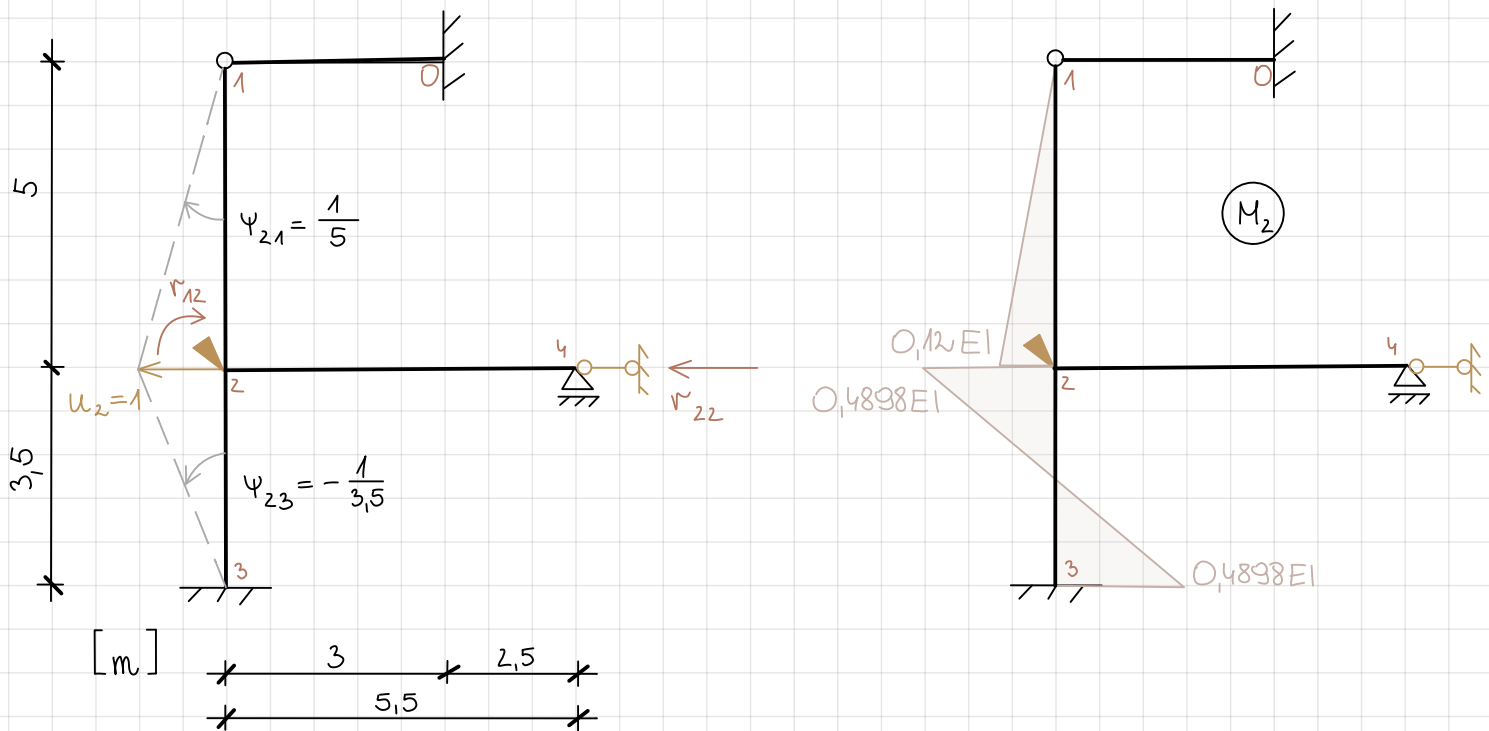
$$M_{24}^{(1)} = \frac{3EI_1}{l_{24}} = \frac{3 \cdot 0,3567EI}{5,5} = 0,1946EI$$

$$M_{23}^{(1)} = \frac{4EI_2}{l_{23}} = \frac{4EI}{3,5} = 1,143EI$$

$$M_{32}^{(1)} = \frac{2EI_2}{l_{23}} = \frac{2 \cdot EI}{3,5} = 0,5714EI$$

$$M_{21}^{(1)} = \frac{3EI_2}{l_{21}} = \frac{3EI}{5} = 0,6EI$$

stan $u_2 = 1$

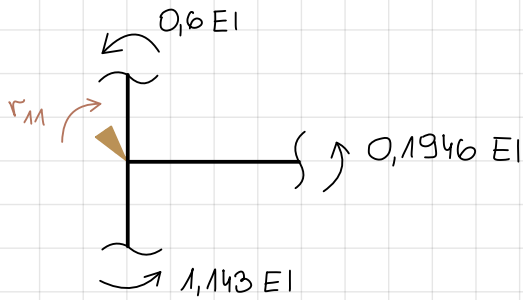


$$M_{23}^{(2)} = -\frac{6EI_2}{l_{23}} \cdot \psi_{23} = -\frac{6 \cdot EI}{3,5} \cdot \left(-\frac{1}{3,5}\right) = 0,4898EI = M_{32}^{(2)}$$

$$M_{21}^{(2)} = -\frac{3EI_2}{l_{21}} \cdot \psi_{21} = -\frac{3EI}{5} \cdot \frac{1}{5} = -0,12EI$$

wyznaczenie r_{ik}

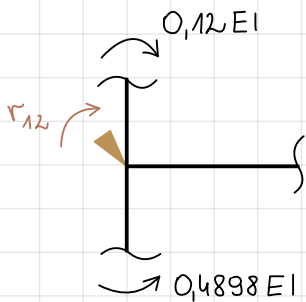
równowaga momentów w węźle 2 w stanie $\psi_1 = 1$



$$\sum M_2^{(1)} = 0$$

$$r_{11} = 1,938 EI$$

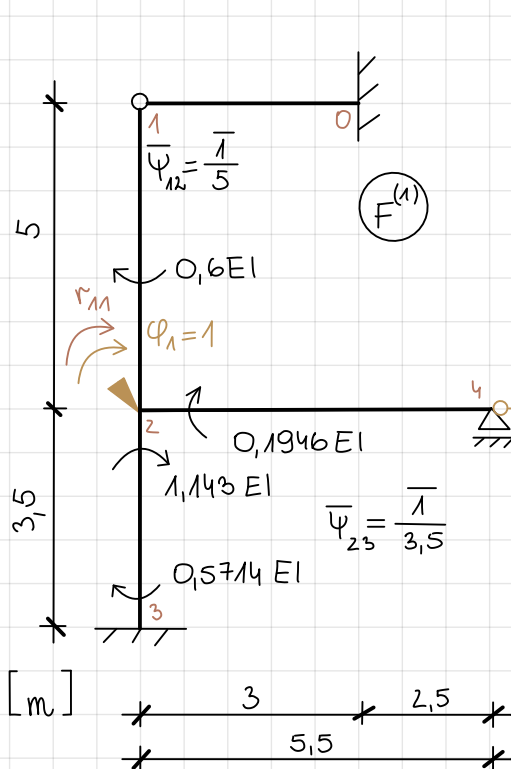
równowaga momentów w węźle 2 w stanie $u_2 = 1$



$$\sum M_2^{(2)} = 0$$

$$r_{12} = 0,3698 EI$$

wyznaczenie reakcji r_{21}

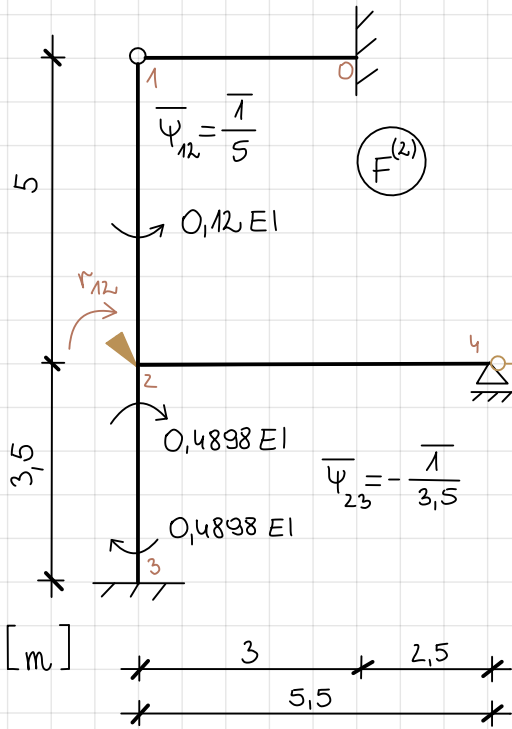


$$\sum_j R_j^{(1)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_n M_{ik}^{(1)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + 0,1946 EI \cdot \bar{0} + (1,143 EI + 0,5714 EI) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{3,5}\right) + 0,6 EI \cdot \frac{\bar{1}}{5} = 0$$

$$r_{21} = 0,3698 EI = r_{12}$$

wyznaczenie reakcji r_{22}



$$\sum_j R_j^{(2)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_n M_{ik}^{(2)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{22} \cdot \bar{1} + (0,4898 EI \cdot 2) \cdot \left(-\frac{1}{3,5}\right) + (-0,12 EI) \cdot \frac{1}{5} = 0$$

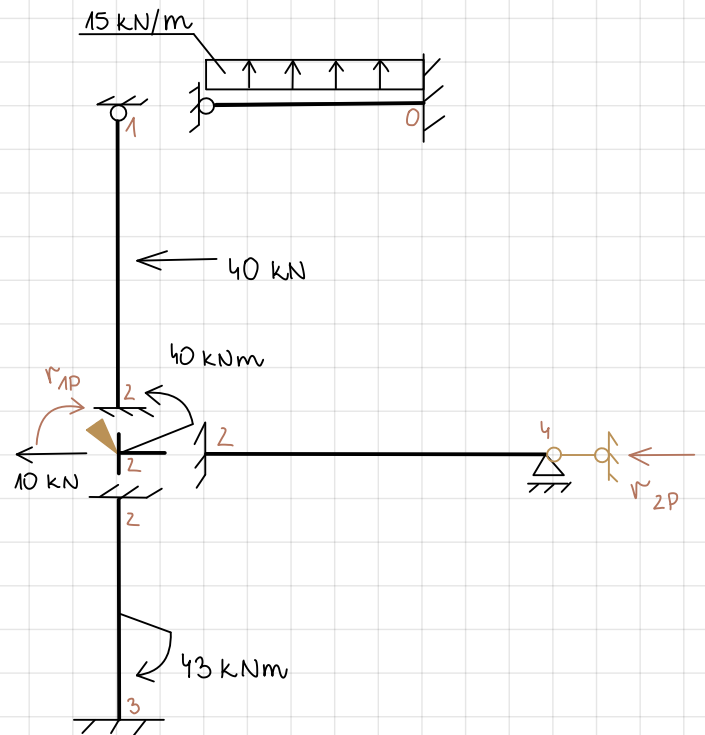
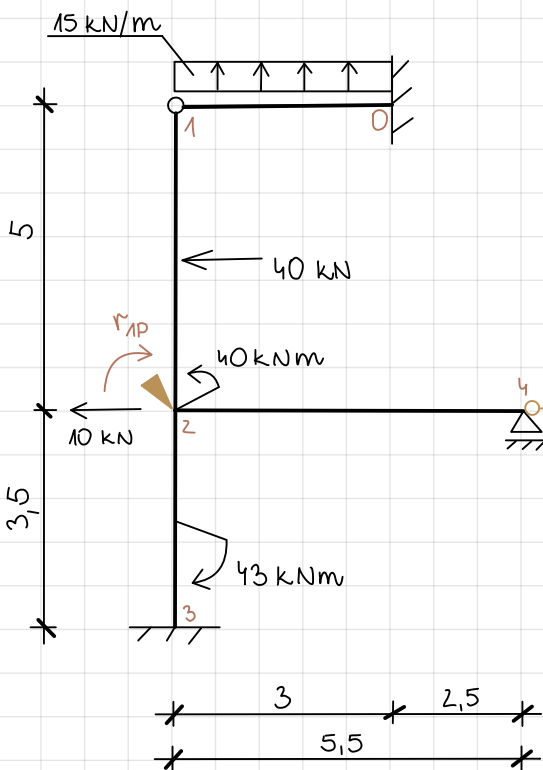
$$r_{22} = 0,3039 EI$$

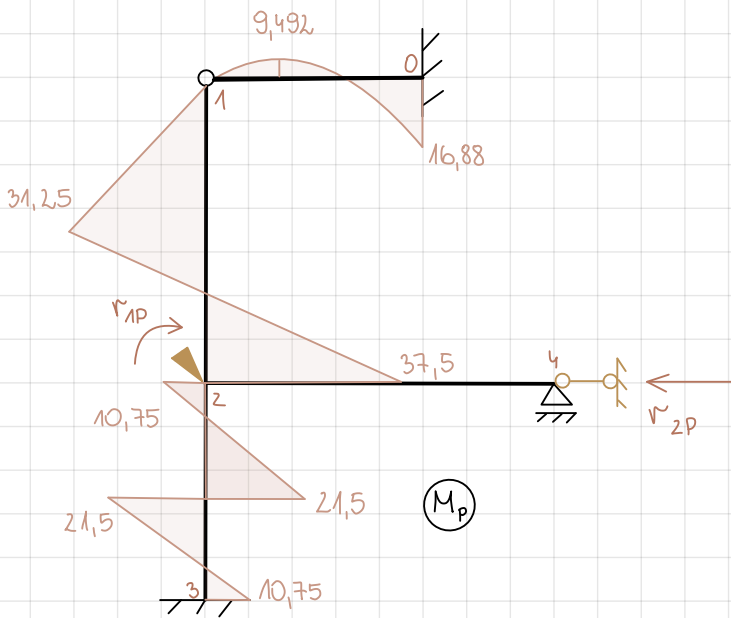
macierz sztywności

$$k = \begin{bmatrix} 1,938 EI & 0,3698 EI \\ 0,3698 EI & 0,3039 EI \end{bmatrix}$$

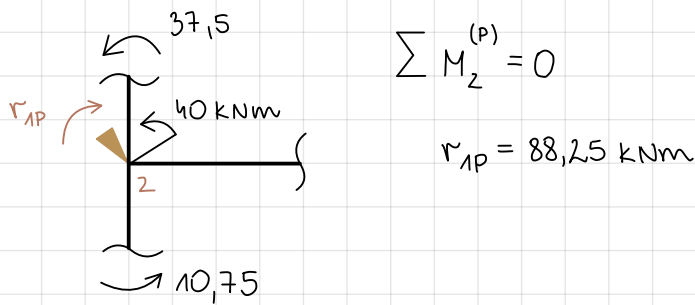
wyznaczanie r_{ip}

wyznaczenie reakcji r_{1p}

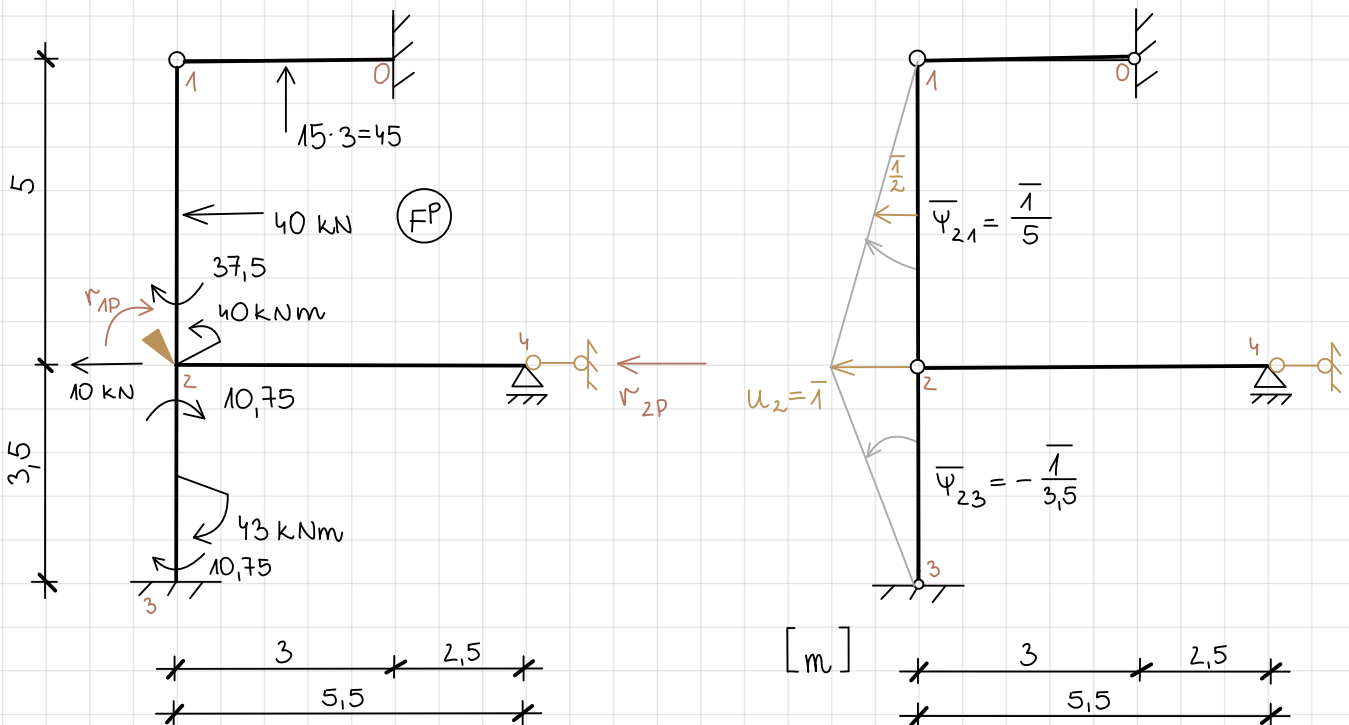




równowaga momentów w węźle 2



wyznaczenie reakcji r_{2P}



$$\sum_j R_j^{(P)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_k P_k^{(P)} \cdot \bar{\delta}_k + \sum_n M_{ik}^{(P)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{2P} \cdot \bar{1} + 45 \cdot 0 + 40 \cdot \frac{\bar{1}}{2} + 10 \cdot \bar{1} + (10,75 + 10,75) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{3,5}\right) + 37,5 \cdot \frac{\bar{1}}{5} + 43 \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{3,5}\right) + 40 \cdot \bar{0} = 0$$

$$r_{2P} = -19,07 \text{ kN}$$

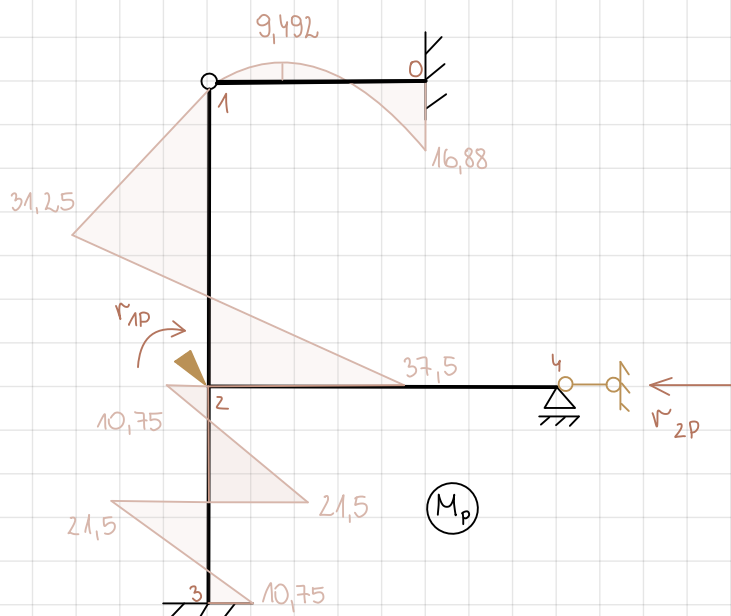
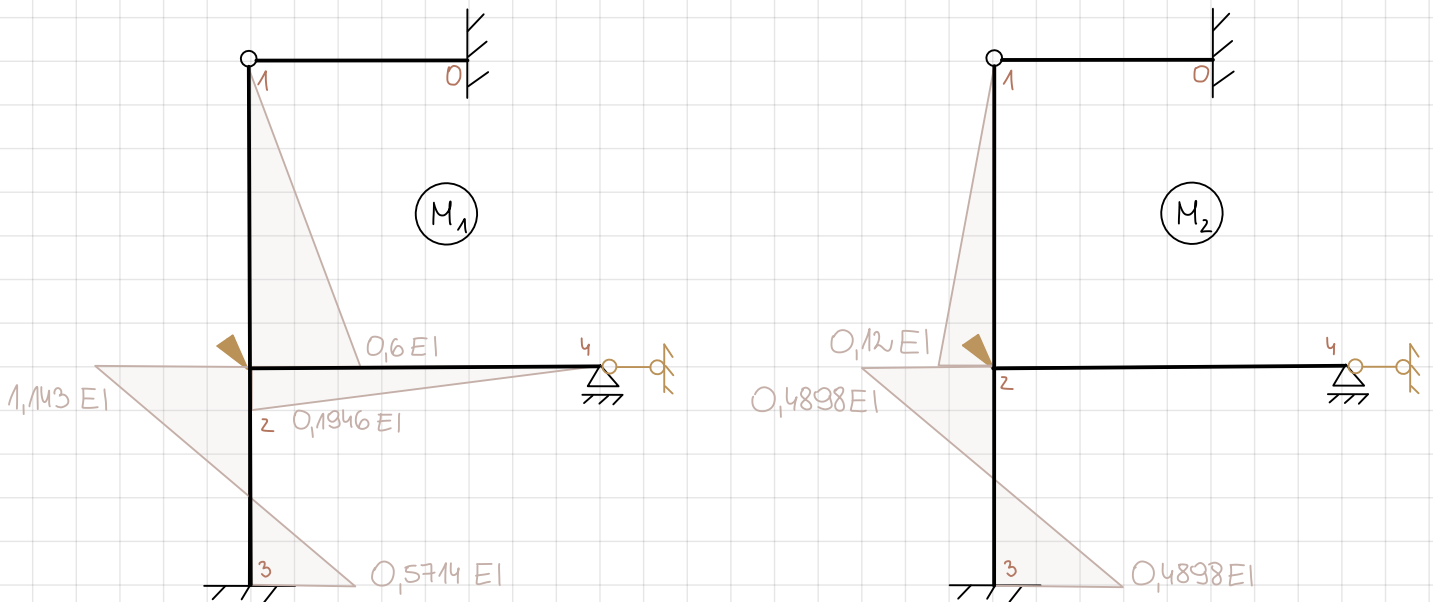
wyznaczanie niewiadomych φ_1 i u_2

$$\begin{cases} 1,938 EI \varphi_1 + 0,3698 EI \cdot u_2 + 88,25 = 0 \\ 0,3698 EI \varphi_1 + 0,3039 EI \cdot u_2 - 19,07 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{-74,90}{EI} \\ u_2 = \frac{153,9}{EI} \end{cases}$$

wyznaczanie rozkładu momentów zginających

$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{ik}^{(2)} \cdot u_2 + M_{ik}^{(P)}$$



$$M_{01}^n = -16,88 \text{ kNm}$$

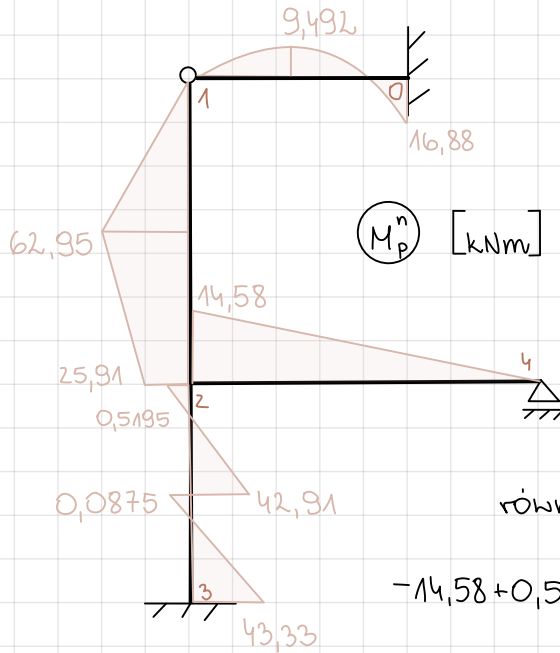
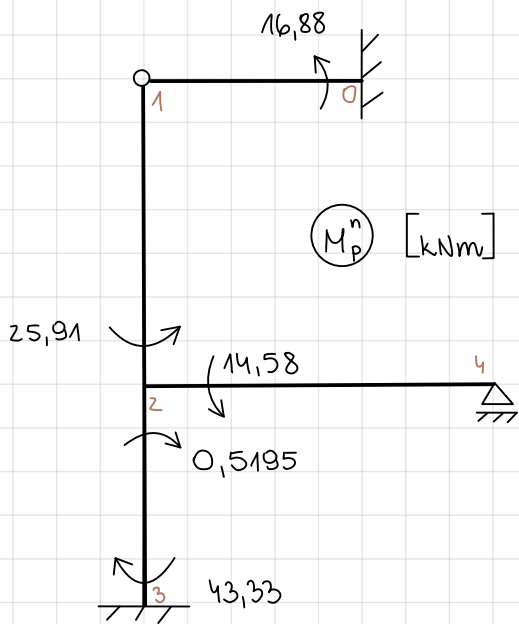
$$M_{12}^n = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{21}^n = 0,6 EI \cdot \left(\frac{-74,9}{EI}\right) - 0,12 EI \cdot \left(\frac{153,9}{EI}\right) + 37,5 = -25,91 \text{ kNm}$$

$$M_{23}^n = 1,143 EI \cdot \left(\frac{-74,9}{EI}\right) + 0,4898 EI \cdot \left(\frac{153,9}{EI}\right) + 10,75 = 0,5195 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^n = 0,5714 EI \cdot \left(\frac{-74,9}{EI}\right) + 0,4898 \cdot \left(\frac{153,9}{EI}\right) + 10,75 = 43,33 \text{ kNm}$$

$$M_{24}^n = 0,1946 EI \cdot \left(\frac{-74,9}{EI}\right) = -14,58 \text{ kNm}$$

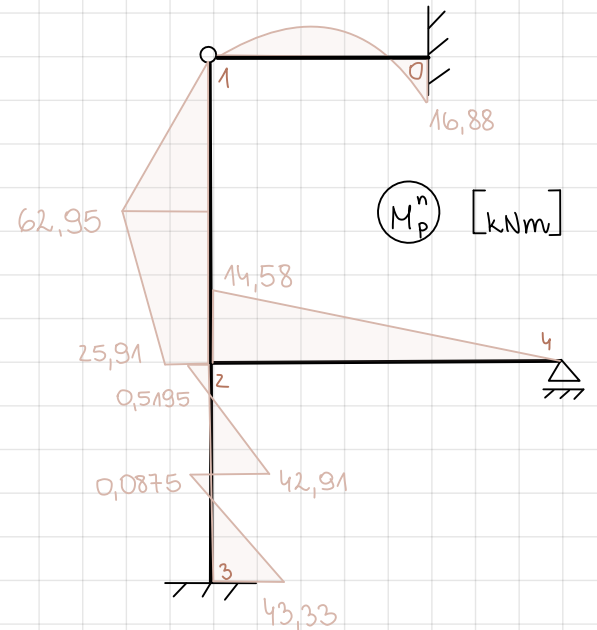
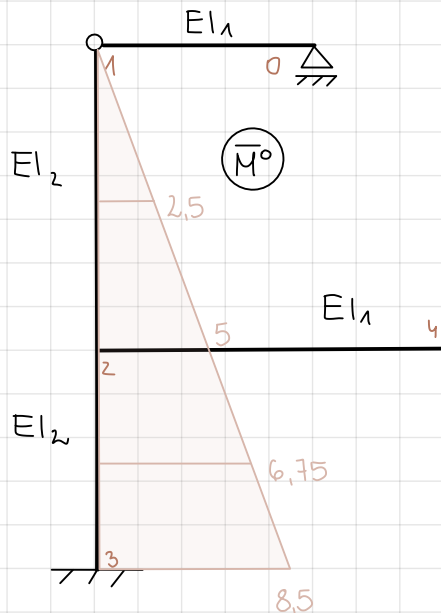
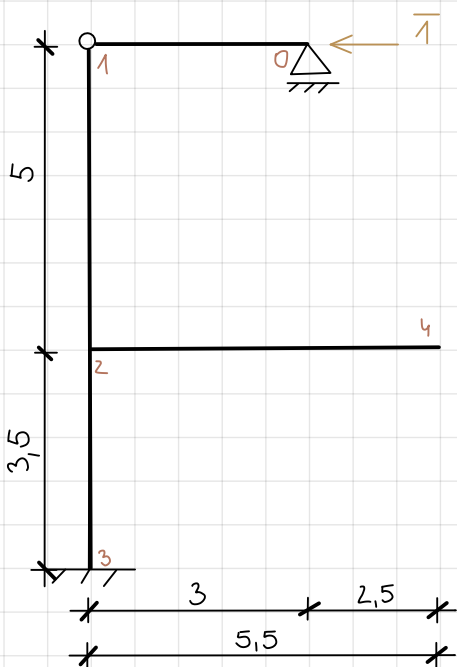


równowaga węzła 2 :

$$-14,58 + 0,520 - 25,91 + 40 = 0,0295 \approx 0$$

kontrola kinematyczna - sprawdzenie przemieszczenia poziomego

w węzle 0



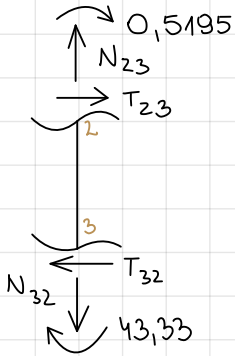
$$H_0 = \int \frac{M_p \cdot \bar{M}^0}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 62,95 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2,5 \left(\frac{2}{3} \cdot 62,95 + \frac{1}{3} \cdot 25,91 \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 25,91 + \frac{1}{3} \cdot 62,95 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1,75 \cdot 42,91 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6,75 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) - \frac{1}{2} \cdot 0,5195 \cdot 1,75 \right. \\ \left. \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 6,75 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1,75 \cdot 43,33 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8,5 + \frac{1}{3} \cdot 6,75 \right) - \frac{1}{2} \cdot 1,75 \cdot 0,0875 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6,75 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \cdot 8,5 \right) \right] = \frac{0,2}{EI}$$

$$|H_0| < \frac{1}{EI} \implies H_0 \cong 0$$

wyznaczanie rozkładu sił poprzecznych

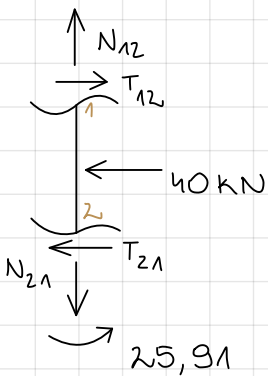


$$\sum M_4 = 0 \quad -14,58 + T_{42} \cdot 5,5 = 0 \quad T_{42} = 2,651 \text{ kN}$$



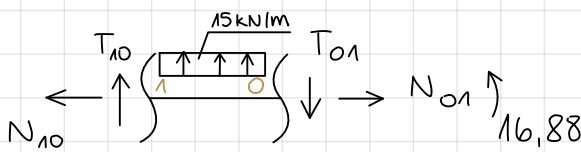
$$\sum M_3 = 0 \quad T_{23} \cdot 3,5 + 43,33 + 43 + 0,5195 = 0 \quad T_{23} = -24,81 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0 \quad T_{32} \cdot 3,5 + 43,33 + 43 + 0,5195 = 0 \quad T_{32} = -24,81 \text{ kN}$$



$$\sum M_1 = 0 \quad T_{21} \cdot 5 + 40 \cdot 2,5 - 25,91 = 0 \quad T_{21} = -14,82 \text{ kN}$$

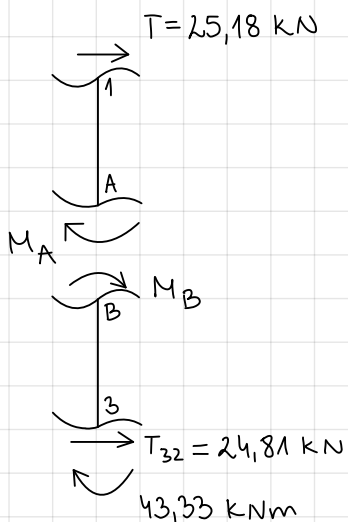
$$\sum M_2 = 0 \quad T_{12} \cdot 5 - 40 \cdot 2,5 - 25,91 = 0 \quad T_{12} = 25,18 \text{ kN}$$



$$\sum M_0 = 0 \quad 3 \cdot T_{10} - 16,88 + 15 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0 \quad T_{10} = -16,87 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad 3 \cdot T_{01} - 16,88 - 15 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0 \quad T_{01} = 28,13 \text{ kN}$$

doliczanie brakujących momentów:



$$\sum M_A = 0$$

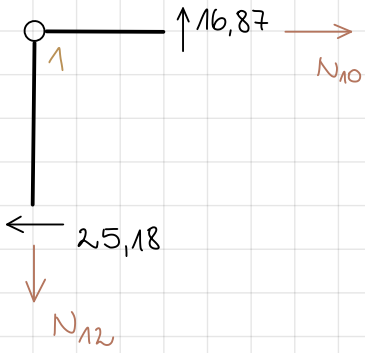
$$25,18 \cdot 2,5 + M_A = 0 \quad M_A = -62,95 \text{ kNm}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$M_B + 43,33 - 24,81 \cdot 1,75 = 0 \quad M_B = -0,0875 \text{ kNm}$$

$$M_C = 43 - 0,0875 = 42,91 \text{ kNm}$$

wyznaczanie sił normalnych

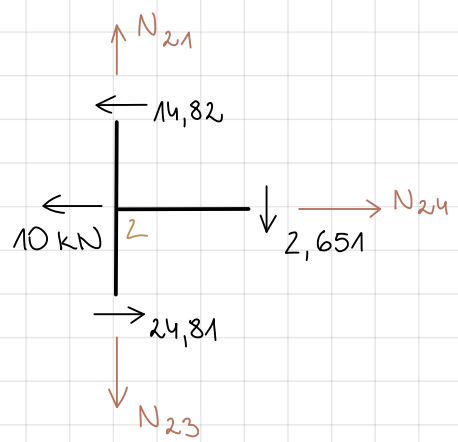


$$\sum X = 0$$

$$N_{10} = 25,18 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

$$N_{12} = 16,87 \text{ kN} = N_{21}$$



$$\sum X = 0$$

$$N_{24} - 14,82 + 24,81 - 10 = 0$$

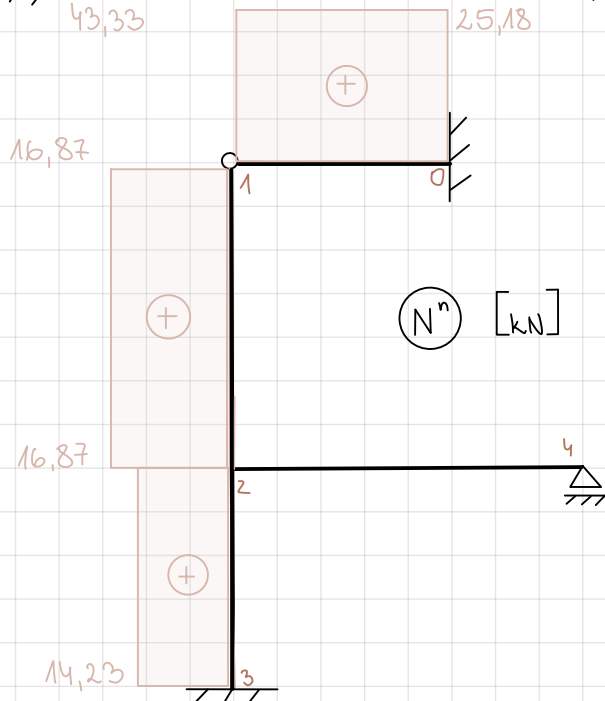
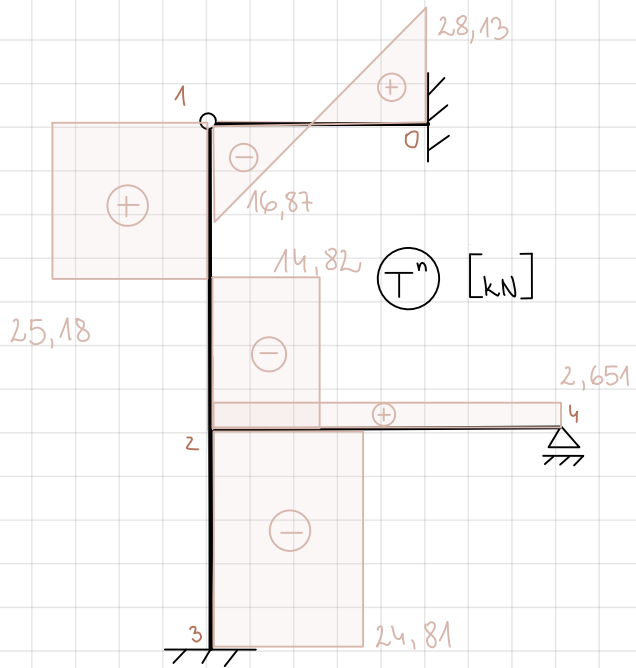
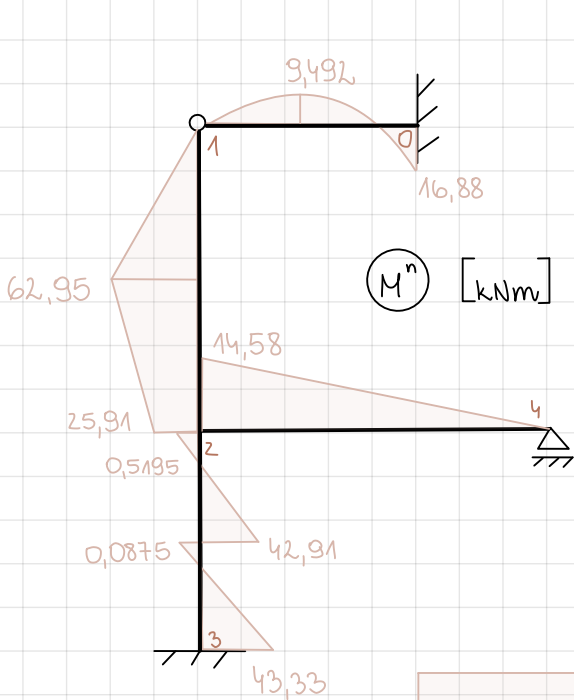
$$N_{24} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

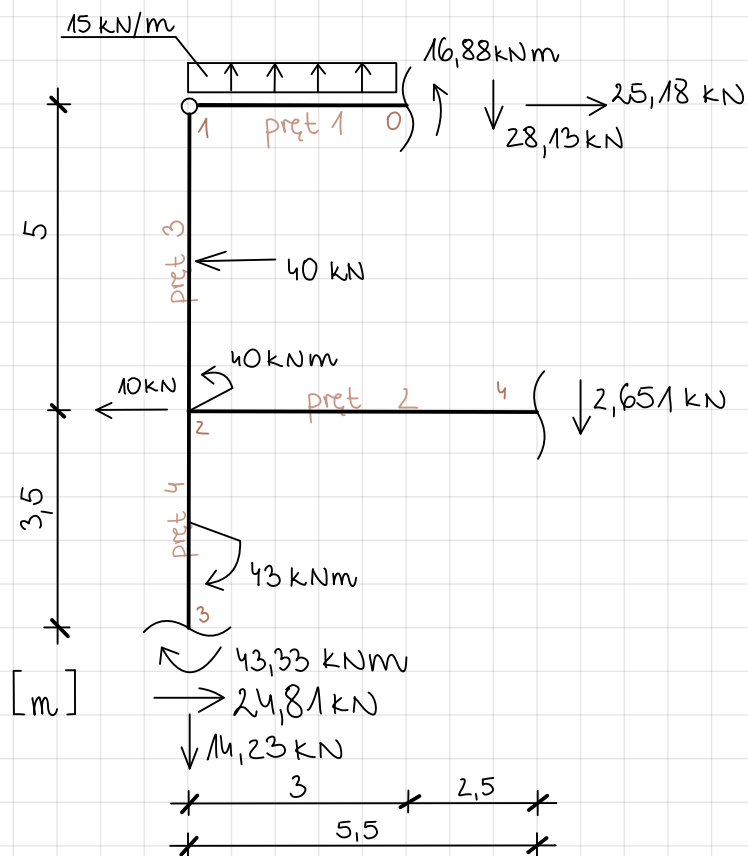
$$N_{21} - N_{23} - 2,651 = 0$$

$$16,87 - 2,651 - N_{23} = 0$$

$$N_{23} = 14,23 \text{ kN}$$



kontrola statyczna



$$\sum X = 0 \quad 25,18 - 40 - 10 + 24,81 = -0,01 \approx 0$$

$$\sum Y = 0 \quad -28,13 + 15 \cdot 3 - 2,651 - 14,23 = -0,01 \approx 0$$

$$\sum M = 0 \quad 43 + 43,33 - 24,81 \cdot 3,5 + 2,651 \cdot 5,5 - 40 - 40 \cdot 2,5 - 15 \cdot 3 \cdot 1,5 - 16,88 + 28,13 \cdot 3$$

$$+ 25,18 \cdot 5 = -0,0145 \approx 0$$

sprawdzenie naprężeń normalnych wywołanych momentem zginającym

- przekrój dla prętów 1,2: I 180 PE

$$M_{max} = |16,88| \text{ kNm}$$

$$I_1 = 1317 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{1688,0}{146} = 115,6 \text{ MPa} < \sigma_{dop}$$

$$W_y = 146 \text{ cm}^3$$

- przekrój dla prętów 3,4: I 200 HEA

$$M_{max} = |62,95| \text{ kNm}$$

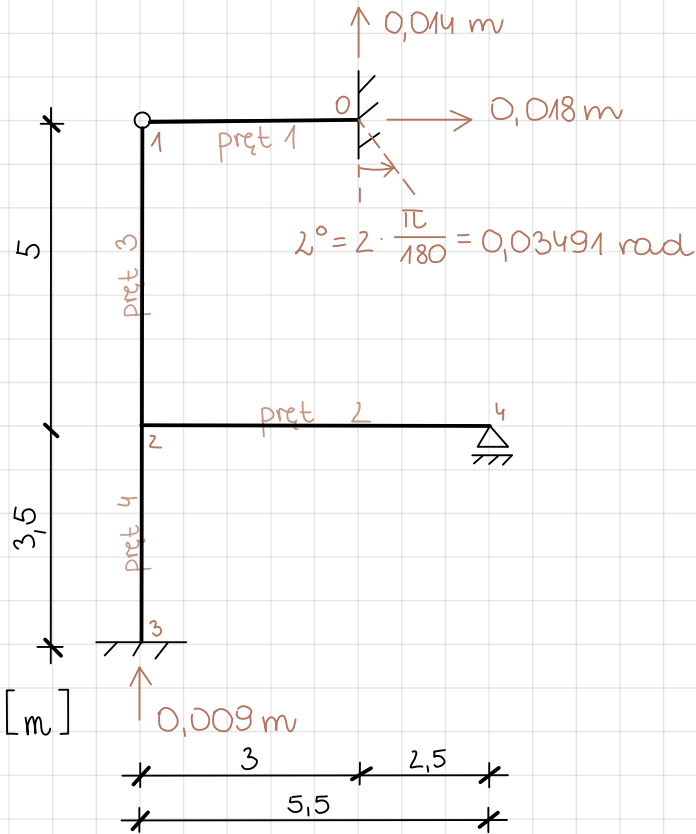
$$I_2 = 3692 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{6295}{389} = 161,8 \text{ MPa} < \sigma_{dop}$$

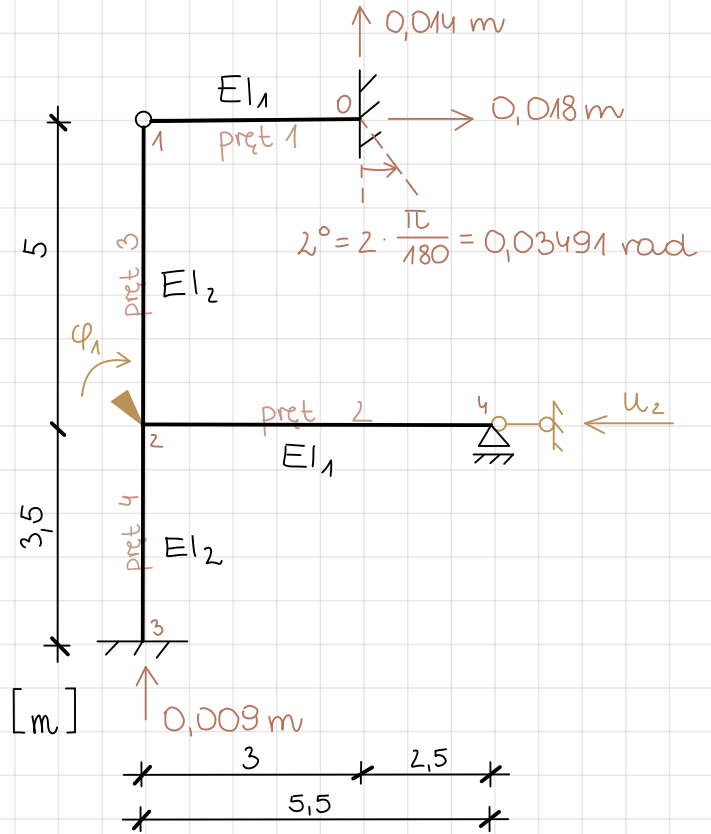
$$W_y = 389 \text{ cm}^3$$

RAMA - OSIADANIE PODPÓR

wk. rzeczywisty

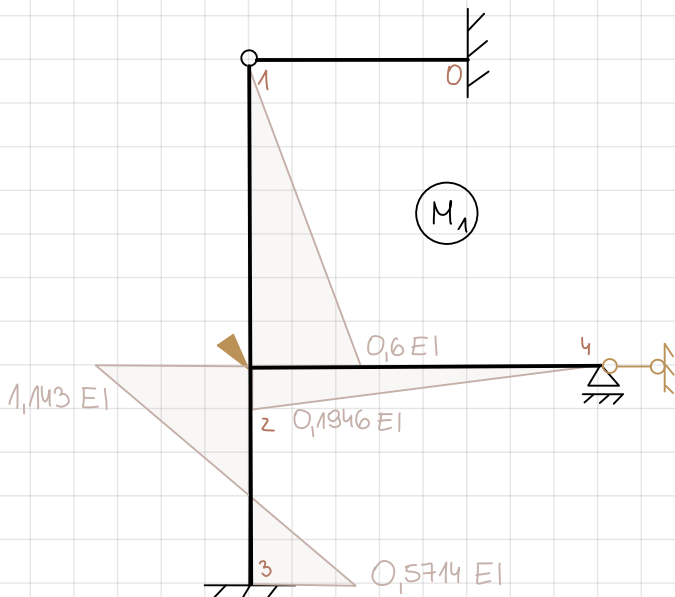


wk. podstawowy



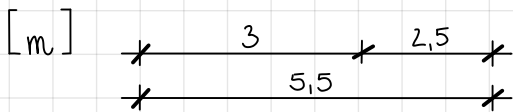
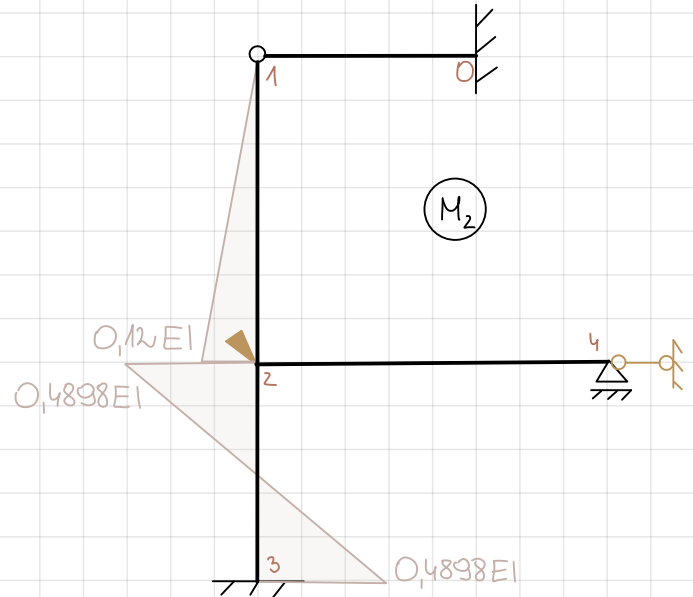
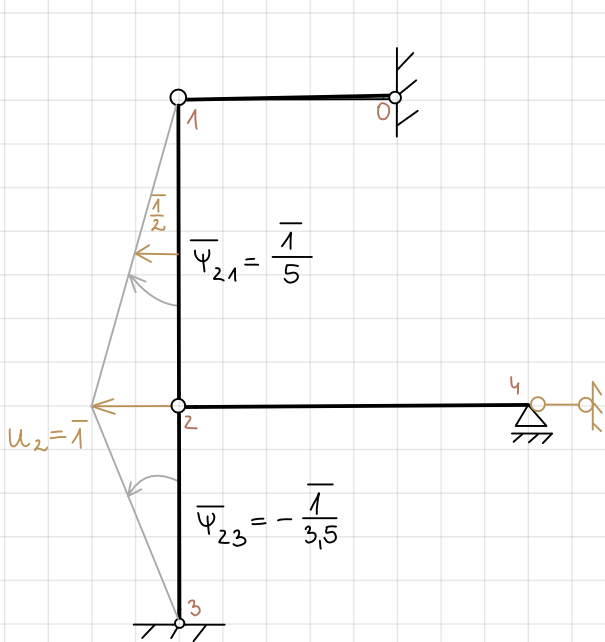
$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot u_2 + r_{1\Delta} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot u_2 + r_{2\Delta} = 0 \end{cases}$$

stan $\varphi_1 = 1$ - taki sam, jak w przykładzie z obciążeniem siłami zewnętrznymi



$$\begin{aligned} M_{24}^{(1)} &= \frac{3EI_1}{l_{24}} = \frac{3 \cdot 0,3567 EI}{5,5} = 0,1946 EI \\ M_{23}^{(1)} &= \frac{4EI_2}{l_{23}} = \frac{4EI}{3,5} = 1,143 EI \\ M_{32}^{(1)} &= \frac{2EI_2}{l_{23}} = \frac{2 \cdot EI}{3,5} = 0,5714 EI \\ M_{21}^{(1)} &= \frac{3EI_2}{l_{21}} = \frac{3EI}{5} = 0,6 EI \end{aligned}$$

stan $u_2 = 1$ - taki sam, jak w przykładzie z obciążeniem siłami zewnętrznymi



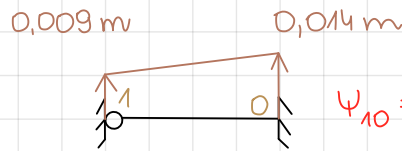
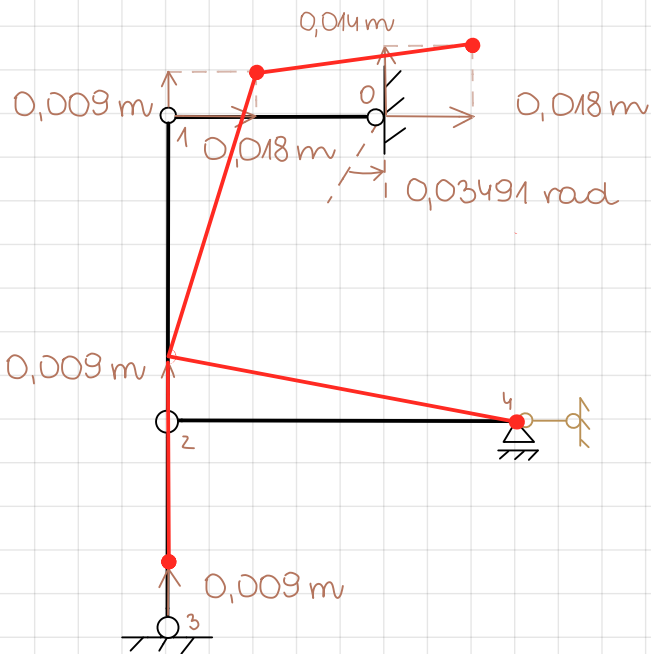
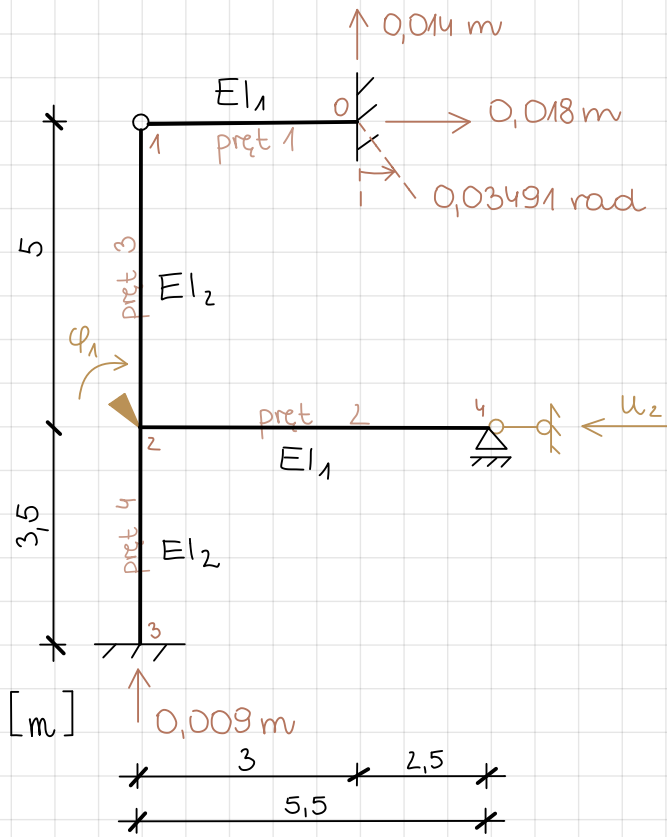
$$M_{23}^{(2)} = -\frac{6EI_2}{L_{23}} \cdot \psi_{23} = -\frac{6 \cdot EI}{3,5} \cdot \left(-\frac{1}{3,5}\right) = 0,4898 EI = M_{32}^{(2)}$$

$$M_{21}^{(2)} = -\frac{3EI_2}{L_{21}} \cdot \psi_{21} = -\frac{3EI}{5} \cdot \frac{1}{5} = -0,12 EI$$

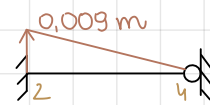
macierz sztywności

$$K = \begin{bmatrix} 1,938 EI & 0,3698 EI \\ 0,3698 EI & 0,3039 EI \end{bmatrix}$$

stan "Δ"



$$\psi_{10} = \frac{-0,014 - (-0,009)}{3} = -0,001667$$



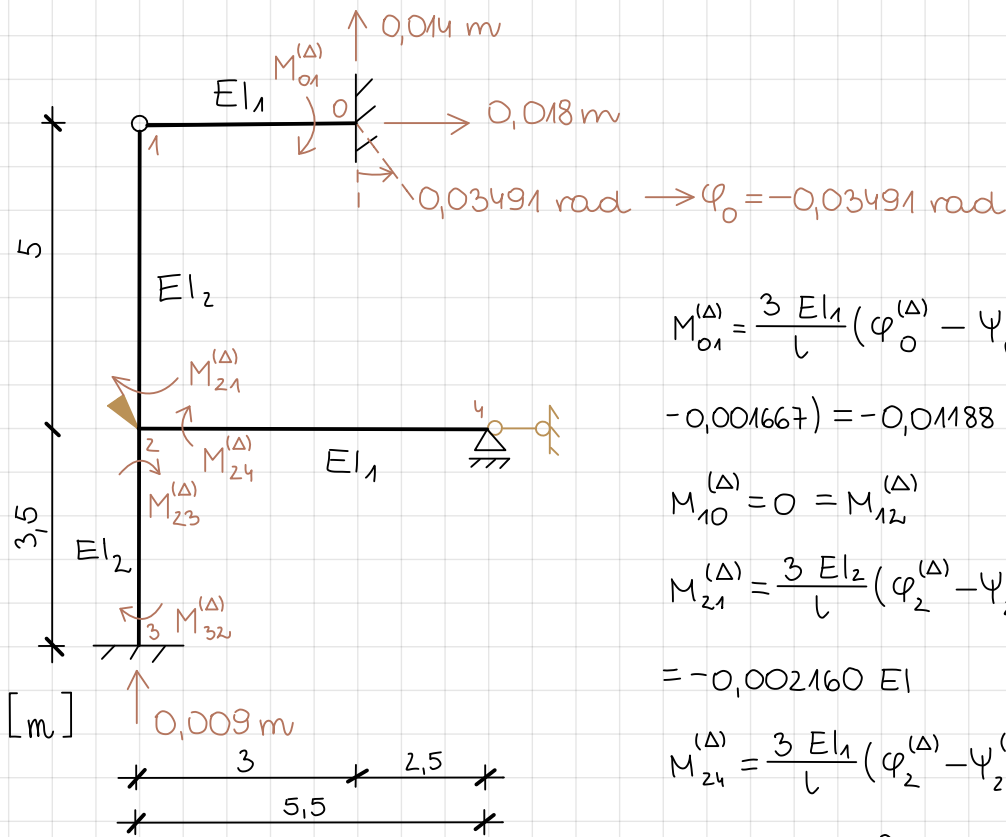
$$\psi_{24} = \frac{0 - (-0,009)}{5,5} = 0,001636$$



$$\psi_{12} = \frac{0 - (-0,018)}{5} = 0,003600$$

$$\psi_{34} = 0$$

$$\psi_{23} = 0$$



$$M_{01}^{(\Delta)} = \frac{3 EI_1}{l} (\varphi_0^{(\Delta)} - \psi_{01}^{(\Delta)}) = \frac{3 \cdot 0,3567 EI}{3} (-0,03491 +$$

$$-0,001667) = -0,01188 EI$$

$$M_{10}^{(\Delta)} = 0 = M_{12}^{(\Delta)}$$

$$M_{21}^{(\Delta)} = \frac{3 EI_2}{l} (\varphi_2^{(\Delta)} - \psi_{21}^{(\Delta)}) = \frac{3 EI}{5} (0 - 0,0036) =$$

$$= -0,002160 EI$$

$$M_{24}^{(\Delta)} = \frac{3 EI_1}{l} (\varphi_2^{(\Delta)} - \psi_{24}^{(\Delta)}) = \frac{3 \cdot 0,3567 EI}{5,5} (0 - 0,001636) =$$

$$= -0,0003183 EI$$

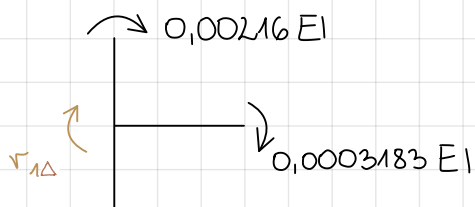
$$M_{23}^{(\Delta)} = \frac{2 EI_2}{l} (2\varphi_2^{(\Delta)} + \varphi_3^{(\Delta)} - 3\psi_{23}^{(\Delta)}) =$$

$$= \frac{2 \cdot EI}{3,5} (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{32}^{(\Delta)} = \frac{2 EI_2}{l} (2\varphi_3^{(\Delta)} + \varphi_2^{(\Delta)} - 3\psi_{32}^{(\Delta)}) = 0$$

wyznaczanie r_{ip}

$r_{1\Delta}$ - równowaga węzła 2



$$\sum M_z = 0 \quad r_{1\Delta} + 0,00216 EI + 0,0003183 EI = 0$$

$$r_{1\Delta} = -0,002478 EI$$

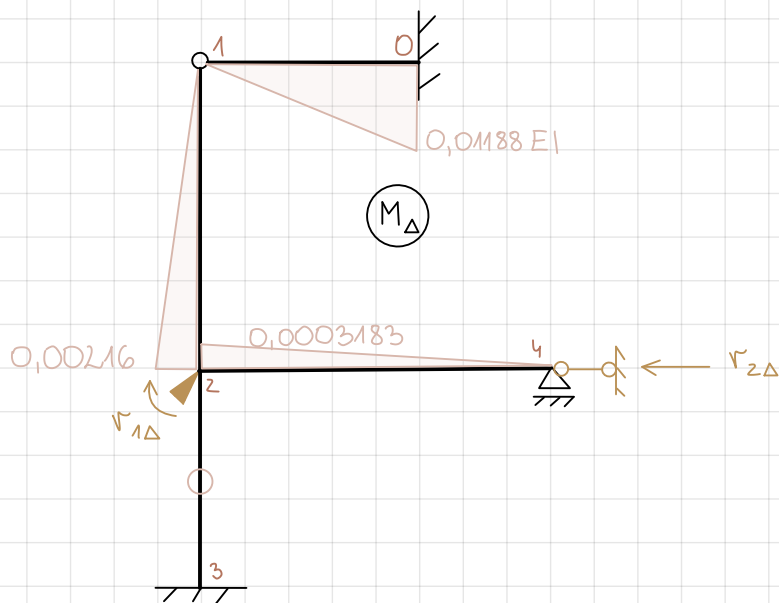
$r_{1\Delta}$ - równanie prac wirtualnych

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}_{21} = \frac{1}{5} \\ \bar{\psi}_{23} = -\frac{1}{3,5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ze stanu} \\ u_2 = 1 \end{array}$$

$$r_{2\Delta} \cdot \bar{1} + \sum M_{ik}^{(\Delta)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{2\Delta} \cdot \bar{1} + (-0,00216 EI) \cdot \frac{1}{5} = 0$$

$$r_{2\Delta} = 0,0004320 EI$$



wyznaczanie niewiadomych φ_1 i u_2

$$\begin{cases} 1,938 EI \varphi_1 + 0,3698 EI \cdot u_2 - 0,002478 EI = 0 \\ 0,3698 EI \varphi_1 + 0,3039 EI \cdot u_2 + 0,0004320 EI = 0 \end{cases}$$

$$I_2 = 3692 \text{ cm}^4$$

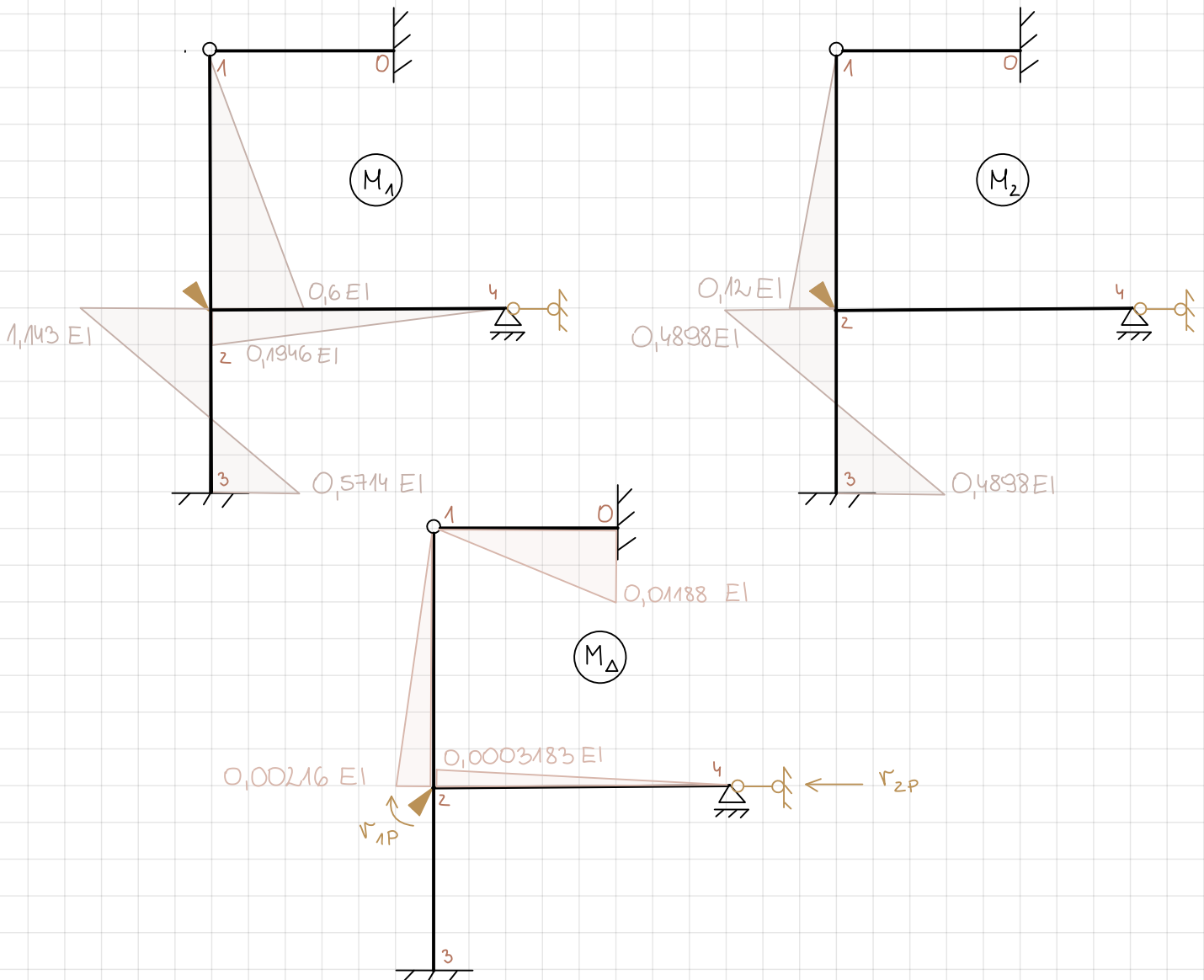
$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$EI = 2,1 \cdot 3692 = 7753 \text{ kNm}^2$$

$$\begin{cases} 1,938 EI \varphi_1 + 0,3698 EI \cdot u_2 - 0,002478 \cdot 7753 = 0 \\ 0,3698 EI \varphi_1 + 0,3039 EI \cdot u_2 + 0,0004320 \cdot 7753 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{15,65}{EI} \\ u_2 = \frac{-30,06}{EI} \end{cases}$$

wyznaczanie rozkładu momentów zginających

$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{ik}^{(2)} \cdot u_2 + M_{ik}^{(\Delta)}$$



$$M_{01}^n = -0,01188 \cdot 7753 = -92,11 \text{ kNm}$$

$$M_{10}^n = M_{12}^n = 0 \text{ kNm}$$

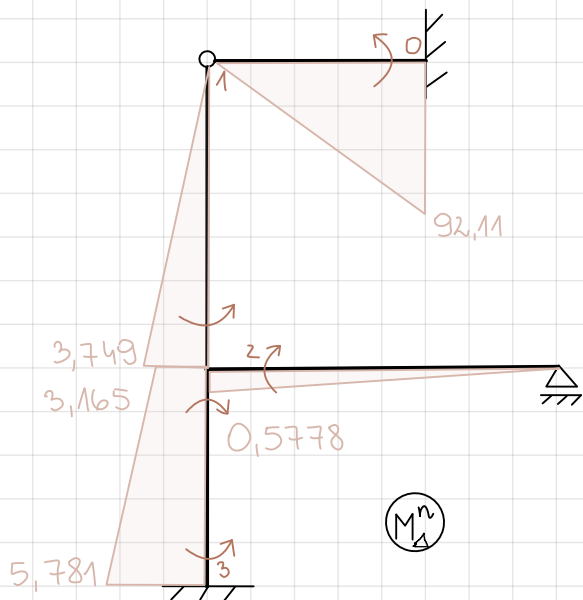
$$M_{21}^n = 0,6EI \cdot \frac{15,65}{EI} - 0,12EI \cdot \frac{-30,06}{EI} - 0,00216 \cdot 7753 = -3,749 \text{ kNm}$$

$$M_{24}^n = 0,1946EI \cdot \frac{15,65}{EI} - 0,0003183 \cdot 7753 = 0,5778 \text{ kNm}$$

$$M_{42}^n =$$

$$M_{23}^n = 1,143EI \cdot \frac{15,65}{EI} + 0,4898EI \cdot \frac{-30,06}{EI} = 3,165 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^n = 0,5714EI \cdot \frac{15,65}{EI} + 0,4898EI \cdot \frac{-30,06}{EI} = -5,781 \text{ kNm}$$

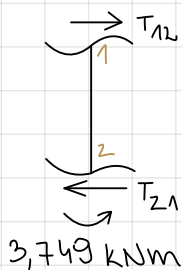


równowaga węzła 2:

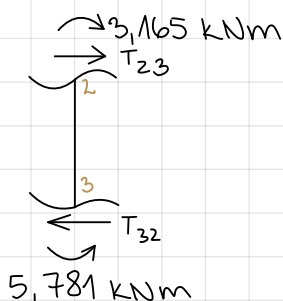
$$3,165 + 0,5778 - 3,749 = -0,0062 \approx 0$$

wyznaczanie rozkładu sił poprzecznych

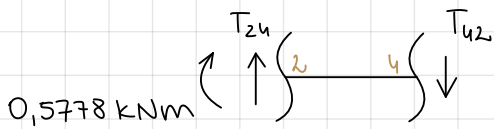
$$\sum M_1 = 0 \quad T_{01} = T_{10} = \frac{92,11}{3} = 30,70 \text{ kN}$$



$$\sum M_1 = 0 \quad T_{21} \cdot 5 - 3,749 = 0 \quad T_{21} = T_{12} = 0,7498 \text{ kN}$$



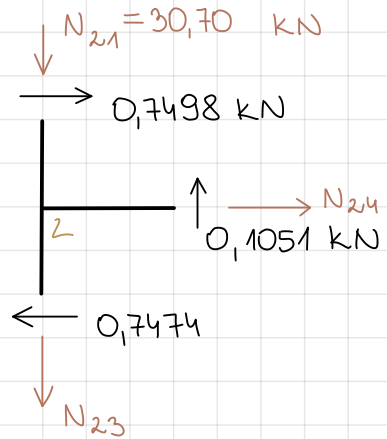
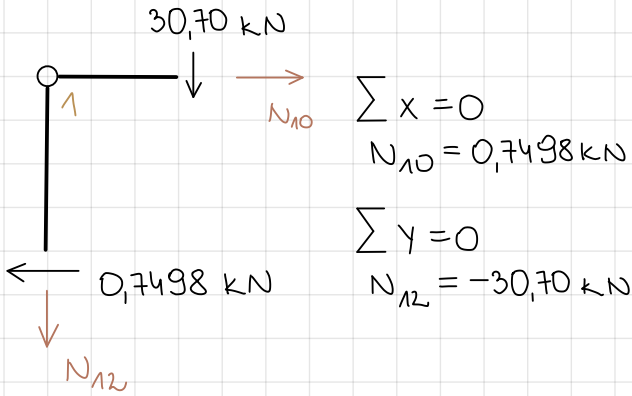
$$\sum M_2 = 0 \quad T_{32} \cdot 3,5 + 3,165 - 5,781 = 0 \quad T_{32} = T_{23} = 0,7474 \text{ kN}$$



$$\sum M_2 = 0 \quad 5,5 \cdot T_{42} + 0,5778 = 0$$

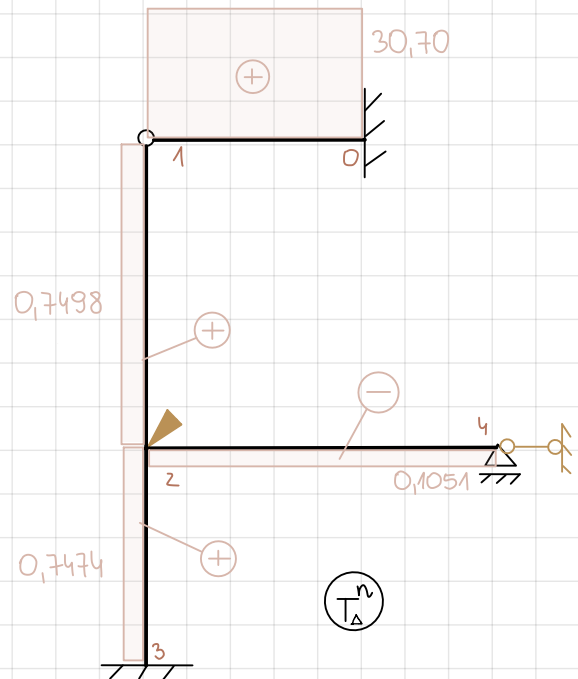
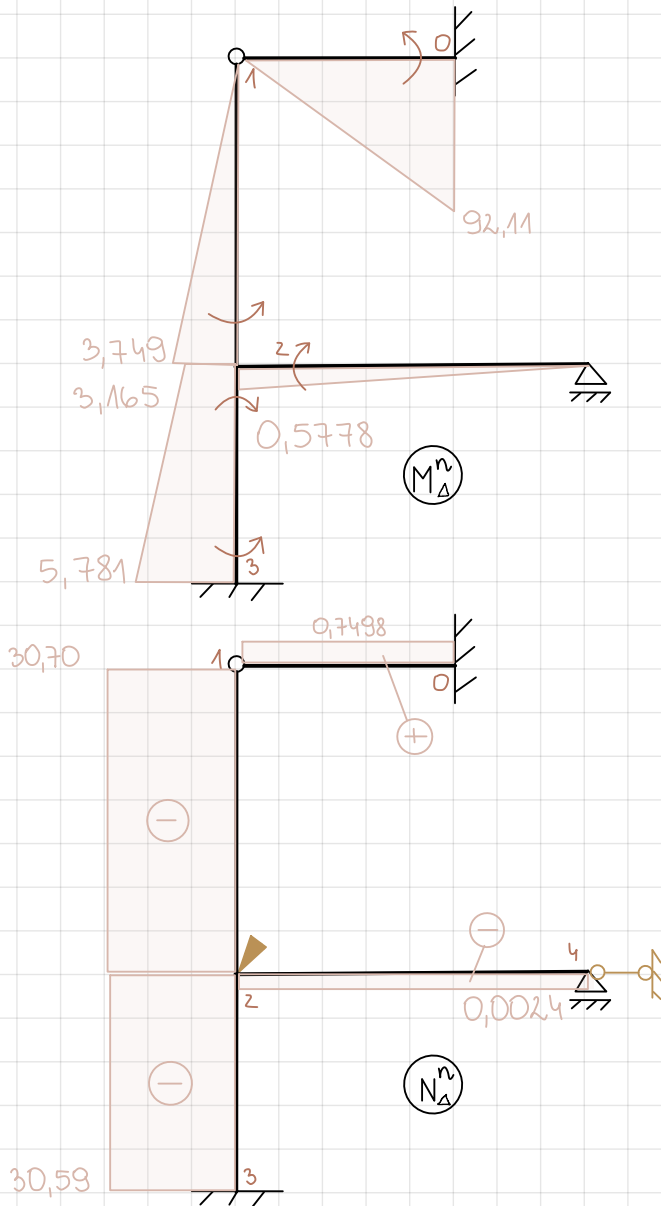
$$T_{42} = T_{24} = -0,1051 \text{ kN}$$

wyznaczanie sił normalnych



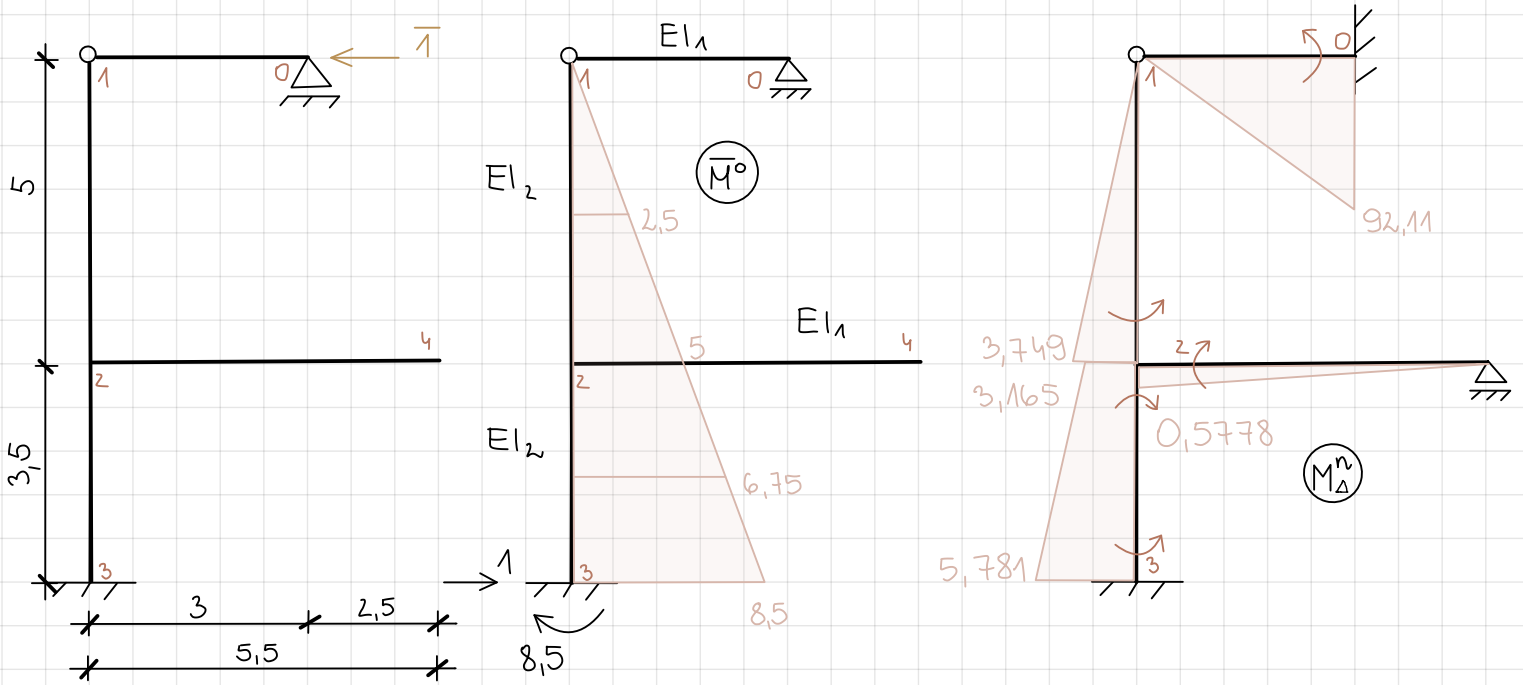
$$\sum X = 0 \quad N_{24} - 0,7474 + 0,7498 = 0 \quad N_{24} = -0,0024 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \quad -N_{23} - 30,70 + 0,1051 = 0 \quad N_{23} = -30,59 \text{ kN}$$



Kontrola kinematyczna – sprawdzenie przemieszczenia poziomego

w węźle O



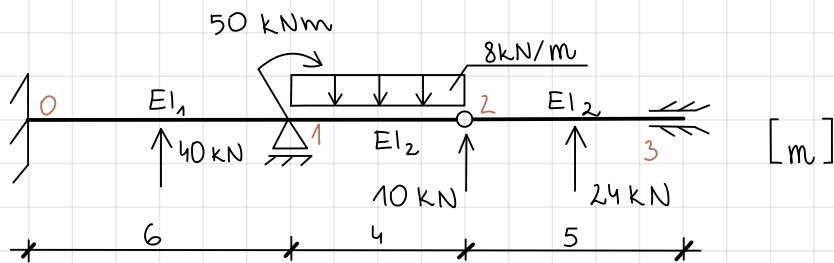
$$H_0 = \int \frac{M_{\Delta}^n \cdot \bar{M}^0}{EI} \cdot dx - \sum \bar{R}^0 \Delta = \frac{1}{EI_2} \left[-\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,749 - \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3,165 + \frac{1}{3} \cdot 5,781 \right) - \frac{1}{2} \cdot 8,5 \cdot 3,5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5,781 + \frac{1}{3} \cdot 3,165 \right) \right] = \frac{-139,6}{EI_2} = \frac{-139,6}{7795} = -0,01791 \text{ m}$$

$$\text{różnica: } |\Delta v_0| = 0,018 - 0,01791 = 0,00009 \text{ m}$$

$$|\Delta v_0| < 1\% \delta_v^0 = 0,01 \cdot 0,018 = 0,00018$$

$$0,00009 > 0,00018 \quad \checkmark$$

schemat I

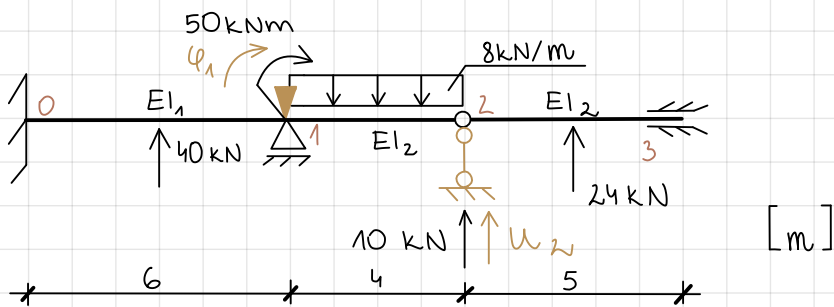


$$\sum \varphi = 1$$

$$\sum u = 1$$

$$SG-N = 1 + 1 = 2$$

układ podstawowy



wstępne przyjęcie przekrojów

przekrój dla pręta 1 : I 180 HEA

$$I_1 = 2510 \text{ cm}^4$$

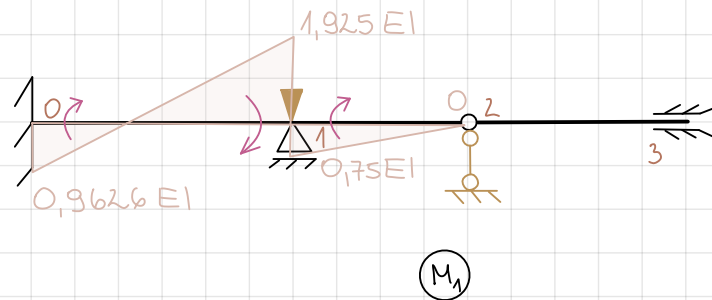
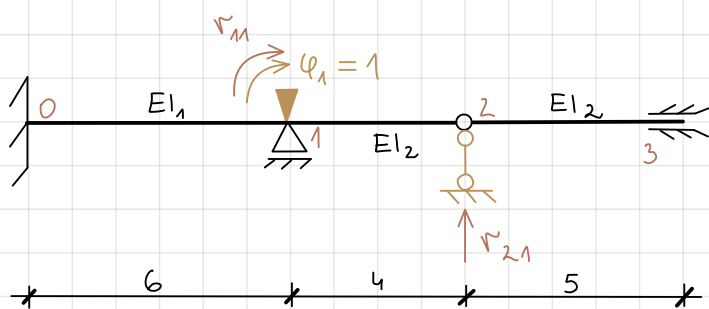
przekrój dla prętów 2,3 : I 160 PE

$$I_2 = 869 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2510}{869} = 2,888 \quad I_1 = 2,888 I_2$$

$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot u_2 + r_{1p} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot u_2 + r_{2p} = 0 \end{cases}$$

stan $\varphi_1 = 1$



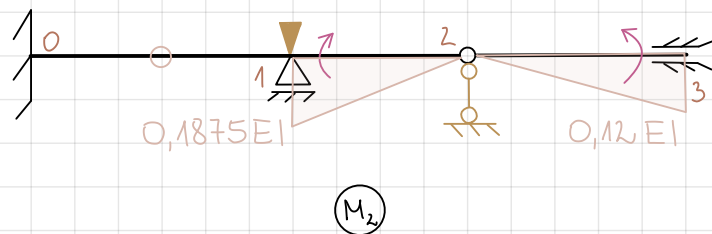
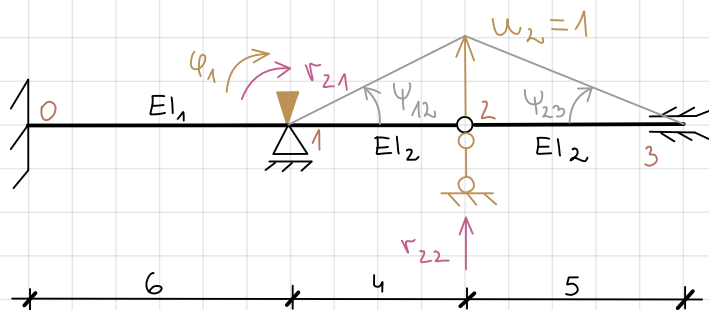
$$M_{01}^{(1)} = \frac{2 \cdot 2,888 \cdot EI}{6} = 0,9626 EI$$

$$M_{10}^{(1)} = \frac{4 \cdot 2,888 EI}{6} = 1,925 EI$$

$$M_{12}^{(1)} = \frac{3EI}{4} = 0,75 EI$$

$$M_{23}^{(1)} = 0 EI = M_{32}^{(1)}$$

stan $u_2 = 1$



$$\psi_{12} = -\frac{1}{4}$$

$$\psi_{23} = \frac{1}{5}$$

01: utwierdzenie - utwierdzenie

$$M_{01} = \frac{2EI_1}{l} (2\varphi_0 + \varphi_1 - 3\psi_{01}) = \frac{2 \cdot 2,888 \cdot EI}{6} (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

$$M_{10} = \frac{2EI_1}{l} (2\varphi_1 + \varphi_0 - 3\psi_{10}) = \frac{2 \cdot 2,888 \cdot EI}{6} (2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0$$

12: utwierdzenie - przegub

$$M_{12} = \frac{3EI_2}{l} (\varphi_1 - \psi_{12}) = \frac{3EI}{4} \cdot (0 + \frac{1}{4}) = \frac{3EI}{16} = 0,1875 EI$$

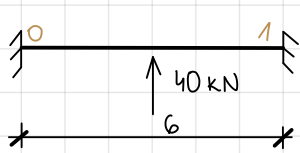
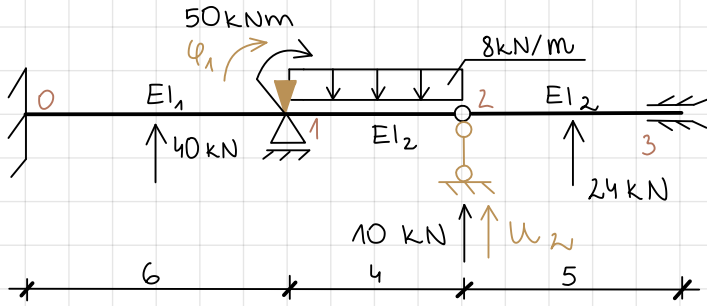
$$M_{21} = 0$$

23: przegub - utwierdzenie

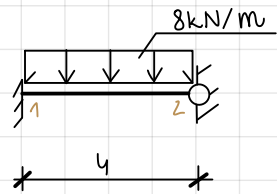
$$M_{23} = 0$$

$$M_{32} = \frac{3EI_2}{l} (\varphi_3 - \psi_{32}) = \frac{3EI}{5} (0 - \frac{1}{5}) = \frac{-3EI}{25} = -0,12 EI$$

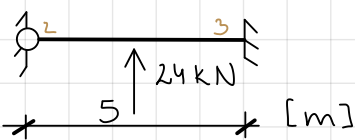
stan P



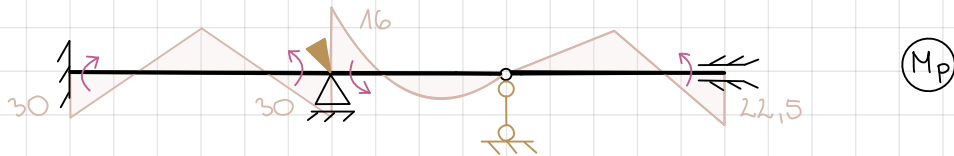
$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{40 \cdot 6}{8} = 30$$



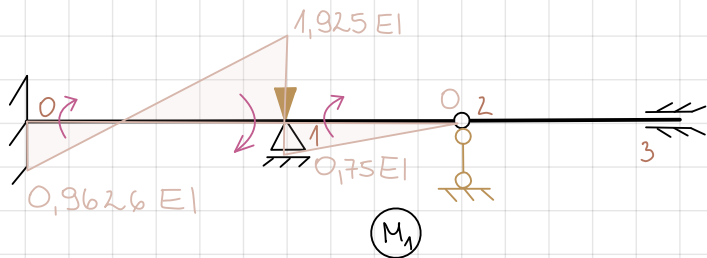
$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \cdot 4^2}{8} = 16$$



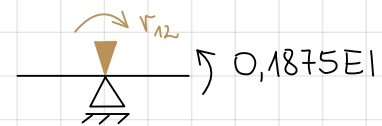
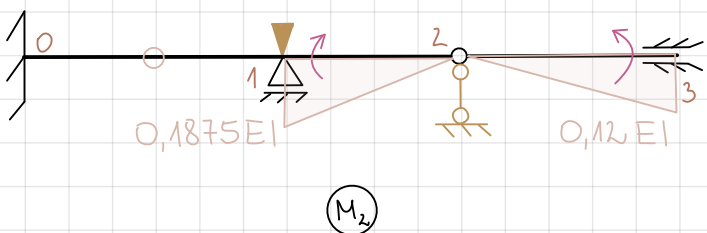
$$M = \frac{3Pl}{16} = \frac{3 \cdot 24 \cdot 5}{16} = 22,5$$



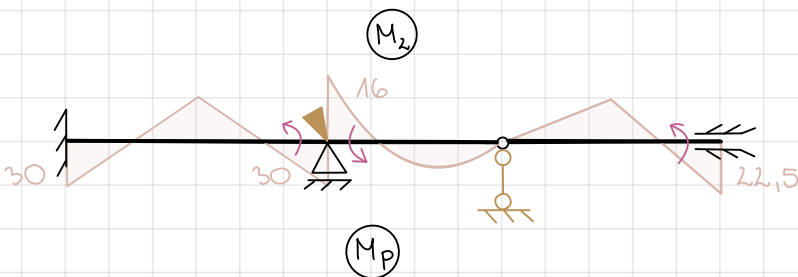
wyznaczanie r_{ik} i r_{ip}



$$r_{11} = 0,75 EI + 1,925 EI = 2,675 EI$$



$$r_{22} = 0,1875 EI$$

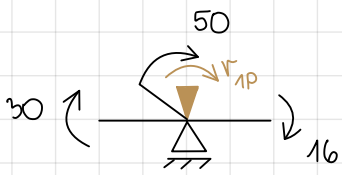


$$r_{21} \cdot 1 + 0,75 EI \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$r_{21} = 0,1875 EI$$

$$r_{22} \cdot 1 + 0,1875 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 0,12 \cdot \frac{1}{5} = 0$$

$$r_{22} = 0,07088 EI$$



$$r_{2P} \cdot \bar{1} + 40 \cdot \bar{0} + 50 \cdot \bar{0} - 8 \cdot 4 \cdot \frac{\bar{1}}{2} + 10 \cdot \bar{1} + 24 \cdot \frac{\bar{1}}{2} + (-16) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + (-22,5) \cdot \frac{1}{5} = 0$$

$$r_{1P} = -96 \text{ kNm}$$

$$r_{2P} = -5,5 \text{ kN}$$

macierz sztywności

$$K = \begin{bmatrix} 2,675 EI & 0,1875 EI \\ 0,1875 EI & 0,07088 EI \end{bmatrix}$$

wyznaczanie niewiadomych φ_1 i u_2

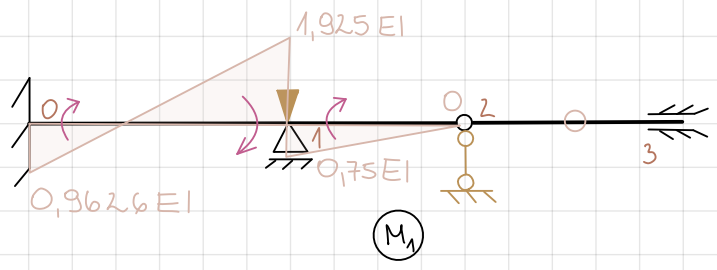
$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot u_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot u_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,675 EI \varphi_1 + 0,1875 EI u_2 - 96 = 0 \\ 0,1875 EI \varphi_1 + 0,07088 EI u_2 - 5,5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{37,38}{EI} \\ u_2 = \frac{-21,29}{EI} \end{cases}$$

wyznaczanie rozkładu momentów zginających

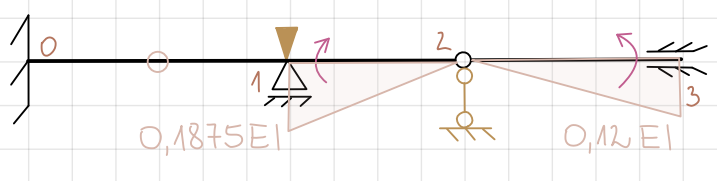
$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{ik}^{(2)} \cdot u_2 + M_{ik}^{(P)}$$



$$M_{01}^n = 0,9626 EI \cdot \frac{37,38}{EI} + 30 = 65,98 \text{ kNm}$$

$$M_{10}^n = 1,925 EI \cdot \frac{37,38}{EI} - 30 = 41,96 \text{ kNm}$$

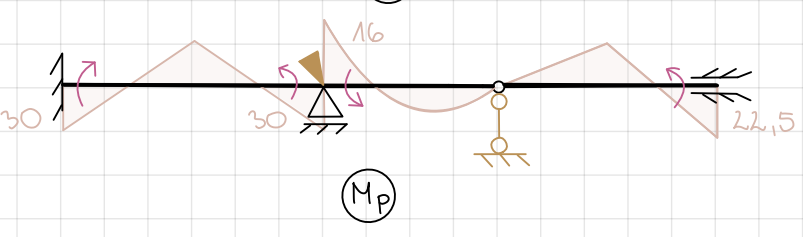
$$M_{12}^n = 0,75 \cdot \frac{37,38}{EI} + 0,1875 EI \cdot \left(\frac{-21,29}{EI}\right) - 16 = 8,043 \text{ kNm}$$

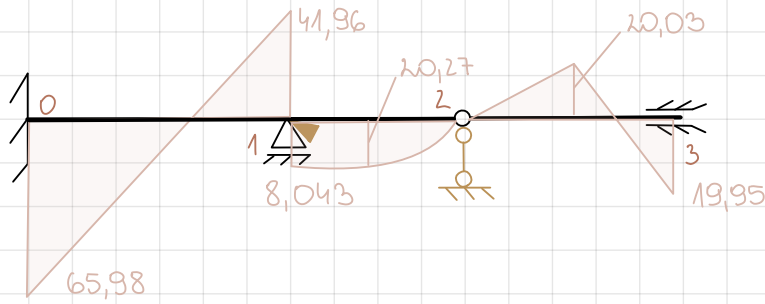
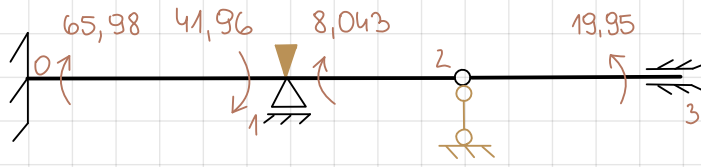


$$M_{21}^n = 0$$

$$M_{23}^n = 0$$

$$M_{32}^n = -0,12 EI \cdot \left(\frac{-21,29}{EI}\right) - 22,5 = -19,95 \text{ kNm}$$





M^n [kNm]

wyznaczanie rozkładu sił poprzecznych



$$\sum M_0 = 0$$

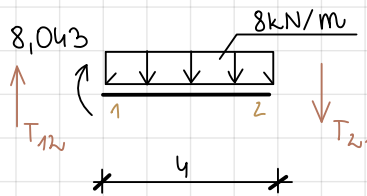
$$T_{10} \cdot 6 + 65,98 + 41,96 - 40 \cdot 3 = 0$$

$$T_{10} = 2,01 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$T_{01} \cdot 6 + 65,98 + 41,96 + 40 \cdot 3 = 0$$

$$T_{01} = -37,99 \text{ kN}$$



$$\sum M_1 = 0$$

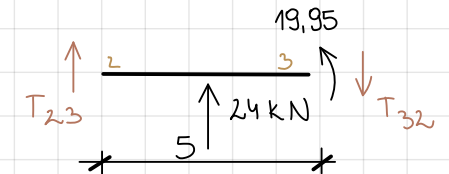
$$4T_{21} + 8,043 + 8 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$T_{21} = -18,01 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$4T_{12} + 8,043 - 8 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$T_{12} = 13,99 \text{ kN}$$



$$\sum M_2 = 0$$

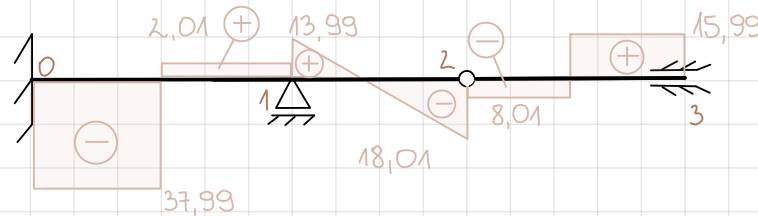
$$5T_{32} - 24 \cdot 2,5 - 19,95 = 0$$

$$T_{32} = 15,99 \text{ kN}$$

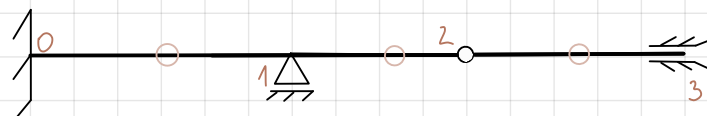
$$\sum M_3 = 0$$

$$5T_{23} + 24 \cdot 2,5 - 19,95 = 0$$

$$T_{23} = -8,01 \text{ kN}$$



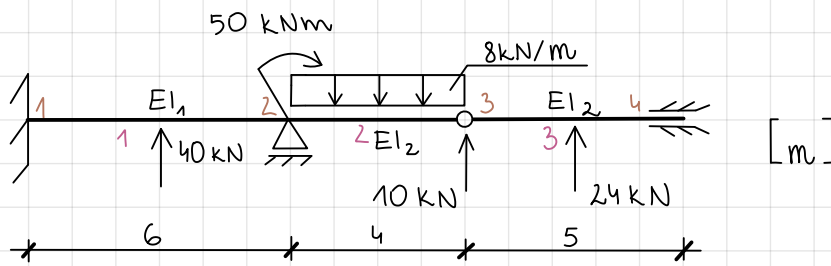
T^n [kN]



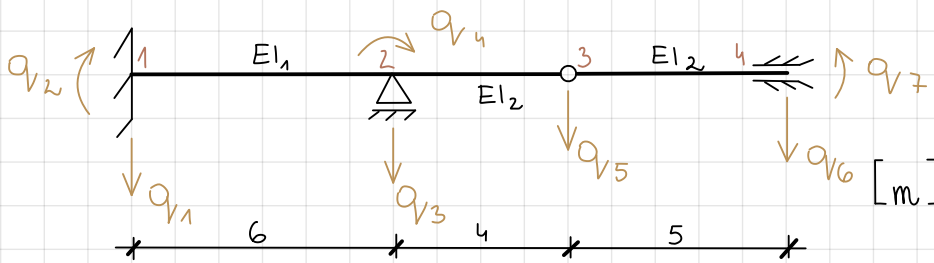
N^n [kN]

BELKA - M. PRZEMIESZCZEŃ UJĘCIU MACIERZOWYM

schemat 1



niewiadome przemieszczenia węzłowe



przekrój dla pręta 1 : I 180 HEA

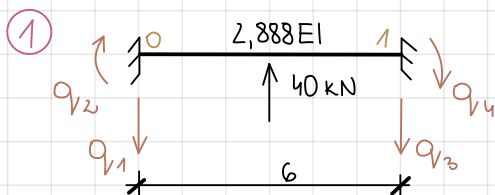
$$I_1 = 2510 \text{ cm}^4$$

przekrój dla prętów 2,3 : I 160 PE

$$I_2 = 869 \text{ cm}^4$$

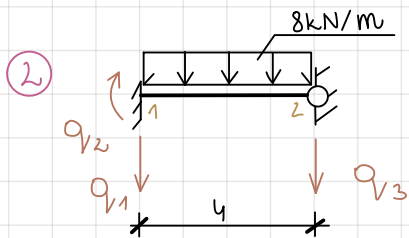
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2510}{869} = 2,888 \quad I_1 = 2,888 I_2$$

pręty - elementy



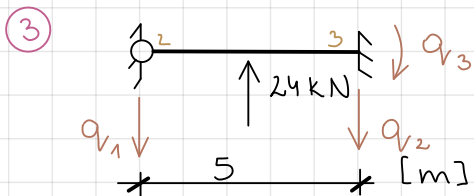
$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot 2,888 EI}{l^3} & \frac{6 \cdot 2,888 EI}{l^2} & -\frac{12 \cdot 2,888 EI}{l^3} & \frac{6 \cdot 2,888 EI}{l^2} \\ \frac{6 \cdot 2,888 EI}{l^2} & 4 \cdot 2,888 EI & -\frac{6 \cdot 2,888 EI}{l^2} & \frac{2 \cdot 2,888 EI}{l} \\ -\frac{12 \cdot 2,888 EI}{l^3} & -\frac{6 \cdot 2,888 EI}{l^2} & \frac{12 \cdot 2,888 EI}{l^3} & -\frac{6 \cdot 2,888 EI}{l^2} \\ \frac{6 \cdot 2,888 EI}{l^2} & \frac{2 \cdot 2,888 EI}{l} & -\frac{6 \cdot 2,888 EI}{l^2} & \frac{4 \cdot 2,888 EI}{l} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0,1604 & 0,4813 & -0,1604 & 0,4813 \\ 0,4813 & 1,925 & -0,4813 & 0,9627 \\ -0,1604 & -0,4813 & 0,1604 & -0,4813 \\ 0,4813 & 0,9627 & -0,4813 & 1,925 \end{bmatrix}$$

$$R_{01} = \begin{bmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ \frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \\ -30 \end{bmatrix}$$



$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0,04688 & 0,1875 & -0,04688 \\ 0,1875 & 0,75 & -0,1875 \\ -0,04688 & -0,1875 & 0,04688 \end{bmatrix}$$

$$R_{02} = \begin{bmatrix} -\frac{5ql}{8} \\ -\frac{ql^2}{8} \\ -\frac{3ql}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -16 \\ -12 \end{bmatrix}$$



$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0,024 & -0,024 & 0,12 \\ -0,024 & 0,024 & -0,12 \\ 0,12 & -0,12 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$R_{03} = \begin{bmatrix} \frac{5P}{16} \\ \frac{3PL}{16} \\ -\frac{11P}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,5 \\ 16,5 \\ -22,5 \end{bmatrix}$$

tabela powiązań

numer elementu	nr przemieszczeń			
	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	—
3	5	6	7	—

agregacja macierzy sztywności

$$K_1 = EI \begin{bmatrix} 0,1604 & 0,4813 & -0,1604 & 0,4813 \\ 0,4813 & 1,925 & -0,4813 & 0,9627 \\ -0,1604 & -0,4813 & 0,1604 & -0,4813 \\ 0,4813 & 0,9627 & -0,4813 & 1,925 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$K_2 = EI \begin{bmatrix} 0,04688 & 0,1875 & -0,04688 \\ 0,1875 & 0,75 & -0,1875 \\ -0,04688 & -0,1875 & 0,04688 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$K_3 = EI \begin{bmatrix} 0,024 & -0,024 & 0,12 \\ -0,024 & 0,024 & -0,12 \\ 0,12 & -0,12 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$K = EI \begin{bmatrix} 0,1604 & 0,4813 & -0,1604 & 0,4813 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4813 & 1,925 & -0,4813 & 0,9627 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1604 & -0,4813 & 0,1604 + 0,04688 & -0,4813 + 0,1875 & -0,04688 & 0 & 0 \\ 0,4813 & 0,9627 & -0,4813 + 0,1875 & 1,925 + 0,75 & -0,1875 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,04688 & -0,1875 & 0,04688 + 0,024 & -0,024 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,024 & 0,024 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,12 & -0,12 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$K = EI \begin{bmatrix} 0,1604 & 0,4813 & -0,1604 & 0,4813 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4813 & 1,925 & -0,4813 & 0,9627 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1604 & -0,4813 & 0,2073 & -0,2938 & -0,04688 & 0 & 0 \\ 0,4813 & 0,9627 & -0,2938 & 2,675 & -0,1875 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,04688 & -0,1875 & 0,07088 & -0,024 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,024 & 0,024 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,12 & -0,12 & 0,6 \end{bmatrix}$$

agregacja wektora reakcji przywęzłowych od obciążenia przestowego

$$R_{01} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \\ -30 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

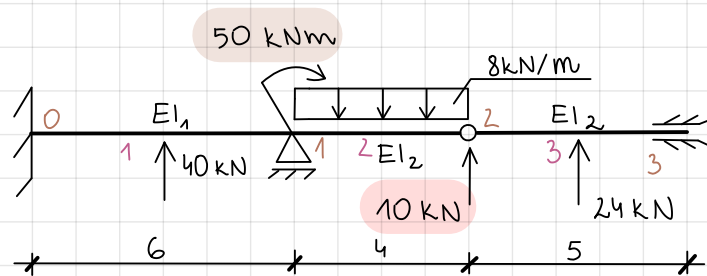
$$R_{02} = \begin{bmatrix} -20 \\ -16 \\ -12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$R_{03} = \begin{bmatrix} -7,5 \\ -22,5 \\ -16,5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 20-20 \\ -30-16 \\ -12 \\ 7,5 \\ 16,5 \\ -22,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \\ -46 \\ -4,5 \\ 16,5 \\ -22,5 \end{bmatrix}$$

wektor sił węzłowych

$$P_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



względnienie warunków podparcia belki

zerowe przemieszczenia węzłowe: $q_{v1}=0$ $q_{v2}=0$ $q_{v3}=0$ $q_{v6}=0$ $q_{v7}=0$

$$K = EI \begin{bmatrix} 0,1604 & 0,4813 & -0,1604 & 0,4813 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4813 & 1,925 & -0,4813 & 0,9627 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1604 & -0,4813 & 0,2073 & -0,2938 & -0,04688 & 0 & 0 \\ 0,4813 & 0,9627 & -0,2938 & 2,675 & -0,1875 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,04688 & -0,1875 & 0,07088 & -0,024 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,024 & 0,024 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,12 & -0,12 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -20 \\ -30 \\ 0 \\ -46 \\ -4,5 \\ -16,5 \\ -22,5 \end{bmatrix} \quad P_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$K_{red} = \begin{bmatrix} 2,675 & -0,1875 \\ -0,1875 & 0,07088 \end{bmatrix} \quad R_{red} = \begin{bmatrix} -46 \\ -4,5 \end{bmatrix} \quad P_{w,red} = \begin{bmatrix} 50 \\ -10 \end{bmatrix}$$

równanie równowagi

$$K_{red} q_{v,red} = P_{w,red} - R_{red}$$

$$\begin{bmatrix} 2,675 & -0,1875 \\ -0,1875 & 0,07088 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{v4} \\ q_{v5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -46 \\ -4,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2,675 & -0,1875 \\ -0,1875 & 0,07088 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{v4} \\ q_{v5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ -5,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{v4} \\ q_{v5} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 37,37 \\ 21,28 \end{bmatrix}$$

wektory przemieszczeń dla elementów

$$q_{v1} = \begin{bmatrix} q_{v1} \\ q_{v2} \\ q_{v3} \\ q_{v4} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 37,37 \end{bmatrix} \quad q_{v2} = \begin{bmatrix} q_{v3} \\ q_{v4} \\ q_{v5} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 37,37 \\ 21,28 \end{bmatrix} \quad q_{v3} = \begin{bmatrix} q_{v5} \\ q_{v6} \\ q_{v7} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 21,28 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektory końcowych reakcji węzłowych

$$R_1 = K_1 q_{v1} + R_{01} = EI \begin{bmatrix} 0,1604 & 0,4813 & -0,1604 & 0,4813 \\ 0,4813 & 1,925 & -0,4813 & 0,9627 \\ -0,1604 & -0,4813 & 0,1604 & -0,4813 \\ 0,4813 & 0,9627 & -0,4813 & 1,925 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 37,37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37,98 \\ 65,98 \\ 2,014 \\ 41,94 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = K_2 q_{v2} + R_{02} = EI \begin{bmatrix} 0,04688 & 0,1875 & -0,04688 \\ 0,1875 & 0,75 & -0,1875 \\ -0,04688 & -0,1875 & 0,04688 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 37,37 \\ 21,28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ -16 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,99 \\ 8,038 \\ -18,01 \end{bmatrix}$$

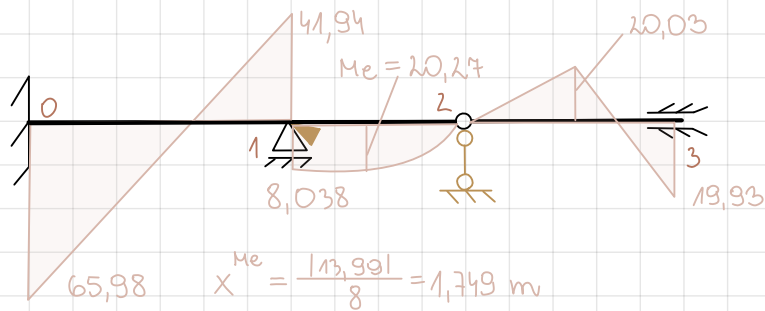
$$R_3 = K_3 q_{v3} + R_{03} = EI \begin{bmatrix} 0,024 & -0,024 & 0,12 \\ -0,024 & 0,024 & -0,12 \\ 0,12 & -0,12 & 0,6 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 21,28 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7,5 \\ 16,5 \\ -22,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,011 \\ 15,99 \\ -19,93 \end{bmatrix}$$

wartości sił węzłowych na końcach prętów

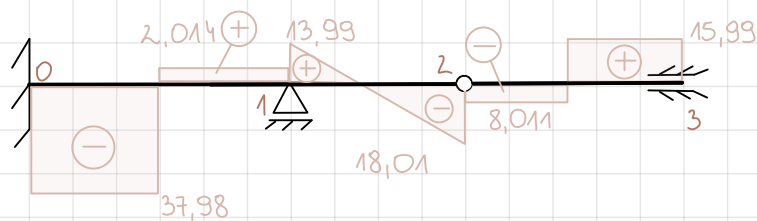
$$\begin{bmatrix} T_{12} \\ M_{12} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37,98 \\ 65,98 \\ 2,014 \\ 41,94 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{23} \\ M_{23} \\ T_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,99 \\ 8,038 \\ -18,01 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{34} \\ T_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,011 \\ 15,99 \\ -19,93 \end{bmatrix}$$



M^N [kNm]



T^N [kN]