



## Ćwiczenie nr 1

# METODA PRZEMIESZCZEŃ

Prowadzący: mgr inż. Anita Kaczor

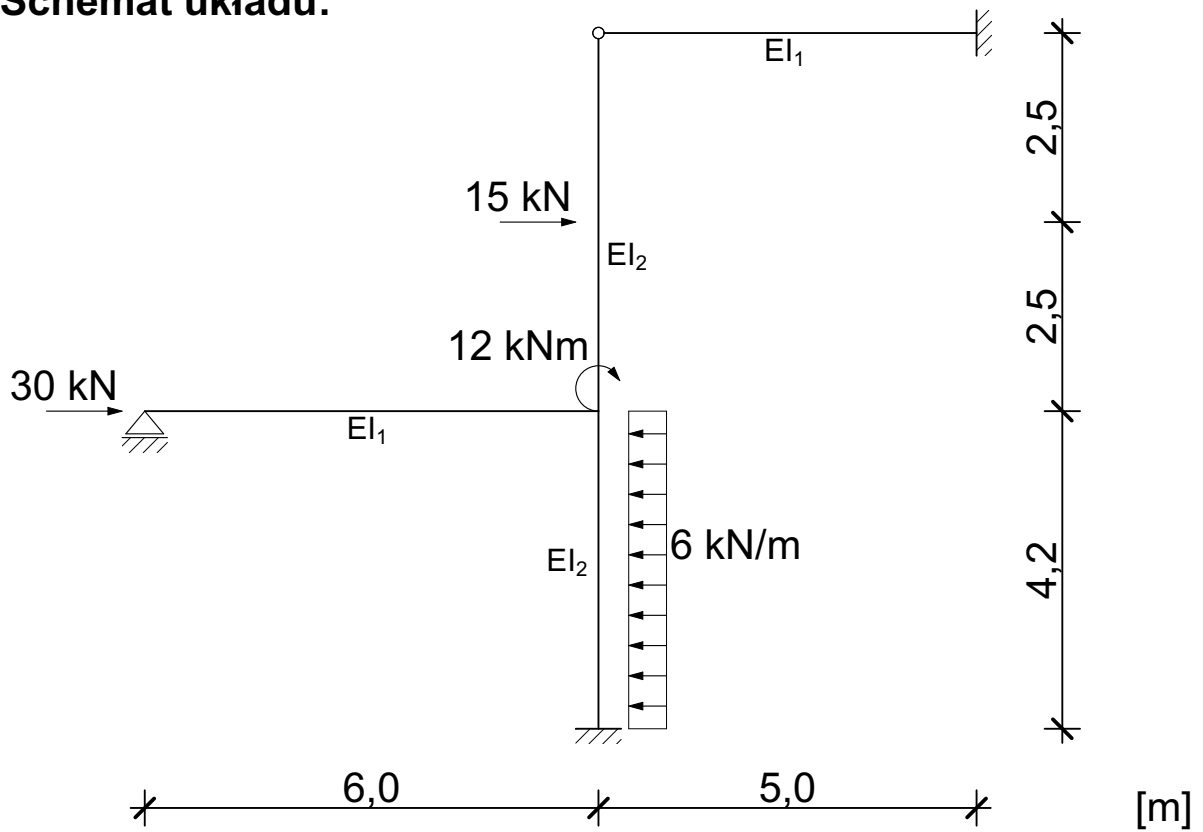
Autor: Sebastian Kowalski

Nr indeksu: 127552

Semestr / rok: V / 2020/2021

Grupa: Z1

# 1. Schemat układu:



# 2. Wstępnie przyjęto przekroje:

HEB 280:  $I_1$   
 HEB 240:  $I_2$

$$n = \frac{I_1}{I_2} = \frac{19\,270}{11\,260} = 1,7114 \Rightarrow I_1 = 1,7114 \cdot I_2$$

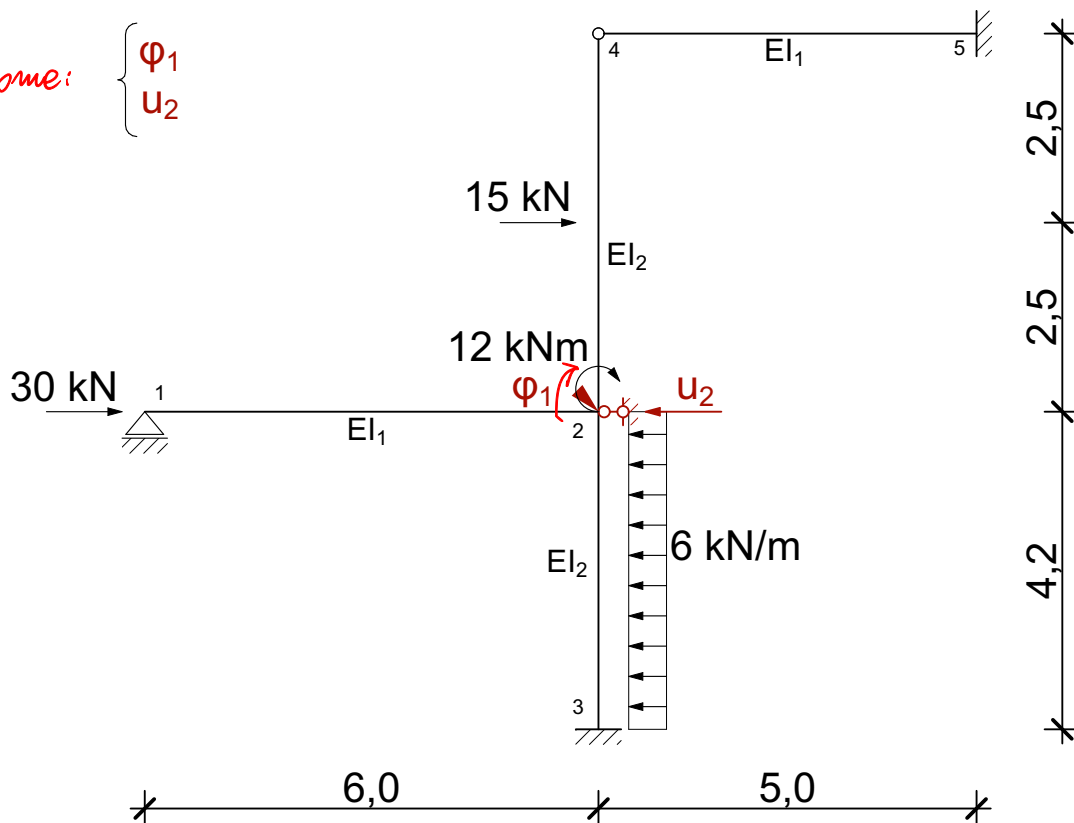
*AK: dokładność 4 cyfr znaczących jest wystarczająca*

# 4. Układ podstawowy:

SGN = 2

*miewiadome:*

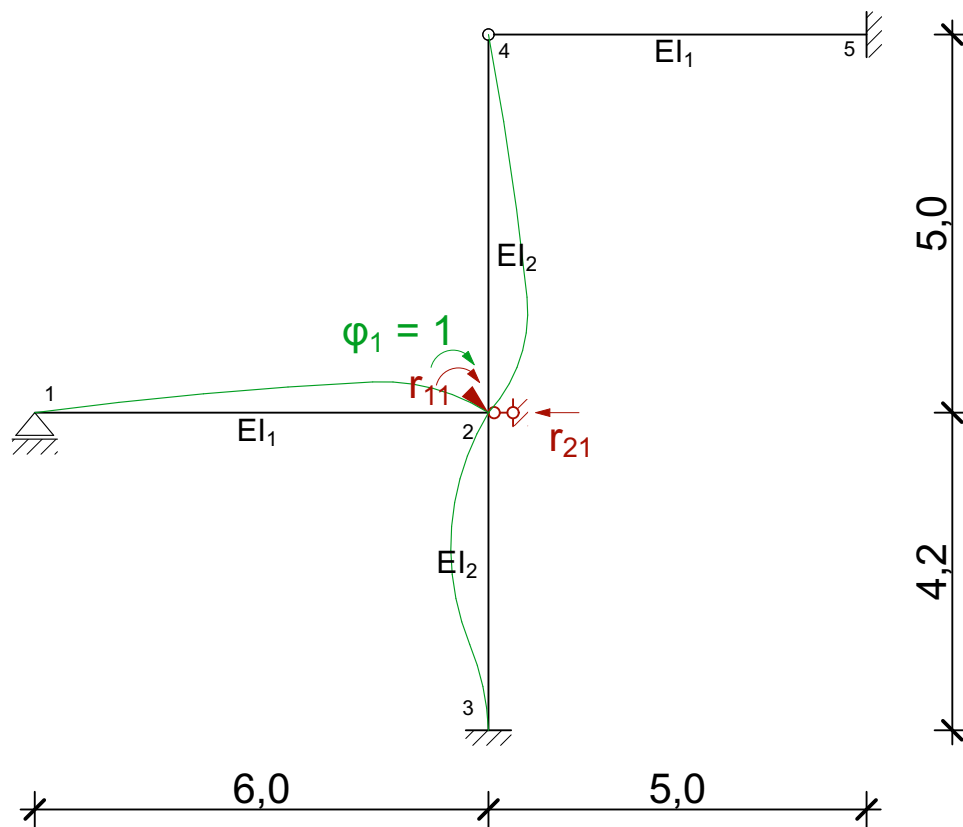
$$\begin{cases} \varphi_1 \\ u_2 \end{cases}$$



#### 4. Układ równań kanonicznych:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot u_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot u_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

#### 5. Stan $\varphi_1 = 1$



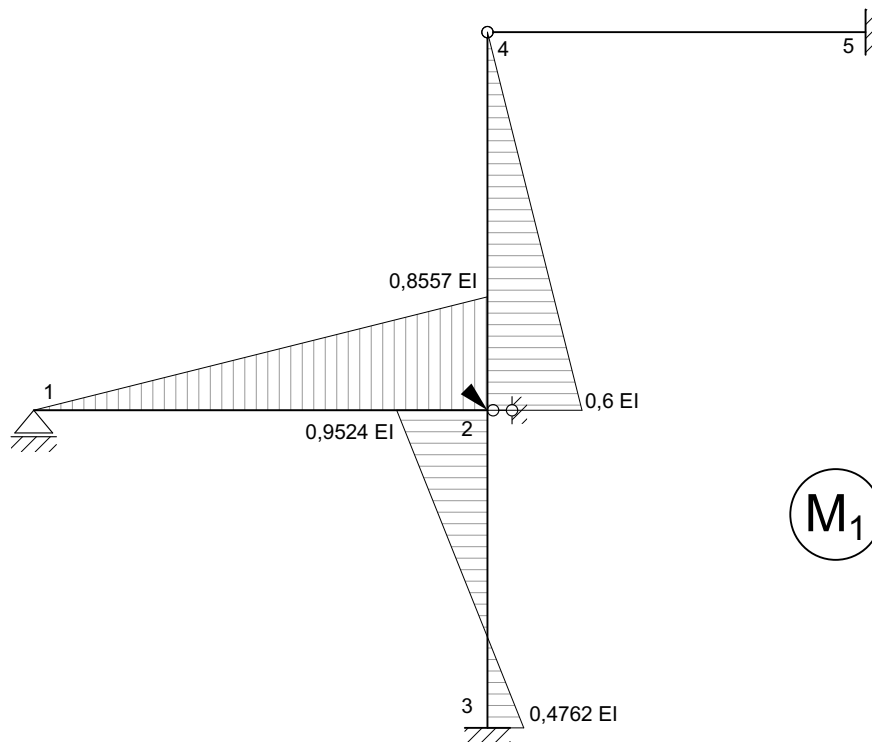
$$M_{21}^{(1)} = \frac{3EI_1}{L_{12}} = \frac{3 \cdot 1,7114EI}{6} = 0,8557 EI$$

$$M_{23}^{(1)} = \frac{4EI_2}{L_{23}} = \frac{4EI}{4,2} = 0,9524 EI$$

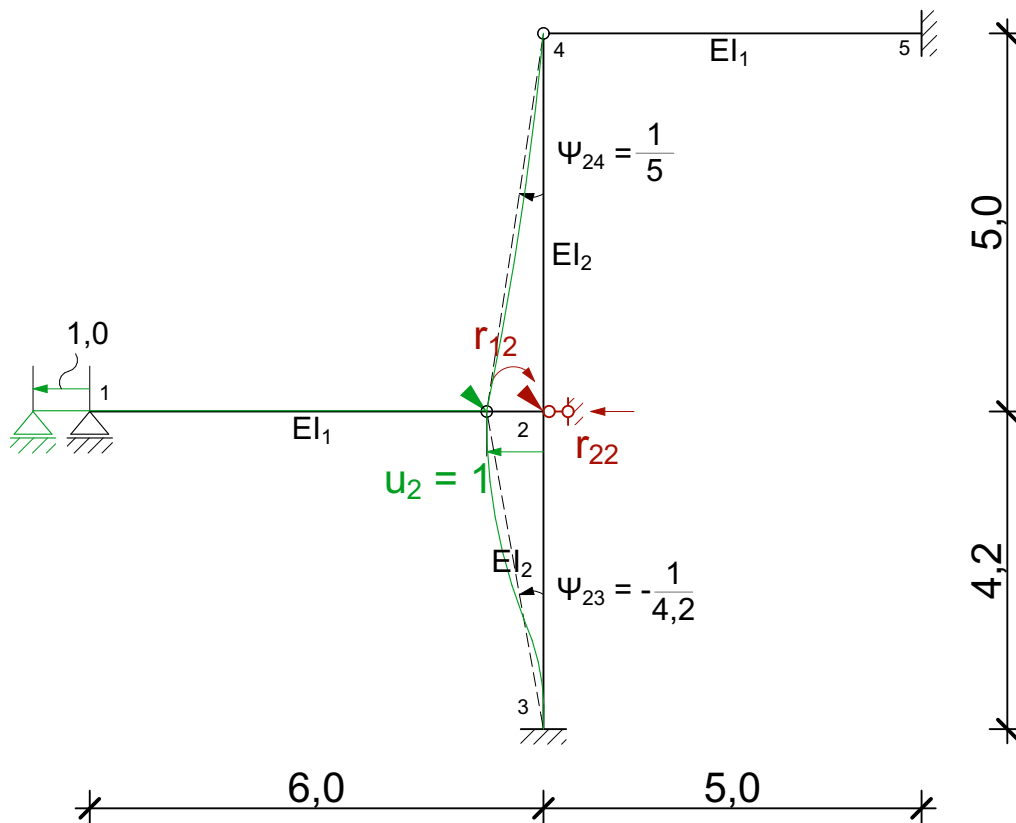
$$M_{32}^{(1)} = \frac{2EI_2}{L_{23}} = \frac{2EI}{4,2} = 0,4762 EI$$

$$M_{24}^{(1)} = \frac{3EI_2}{L_{24}} = \frac{3EI}{5} = 0,6 EI$$

Wykres momentów zginających wywołany osiadaniem  $\varphi_1 = 1$ :



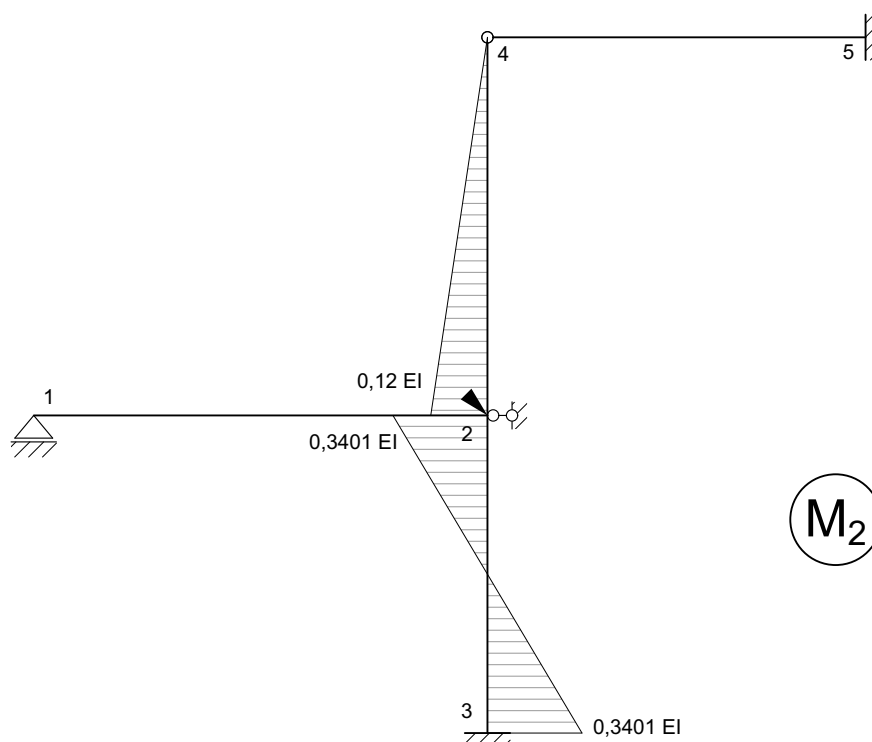
### 6. Stan $u_2 = 1$



$$M_{23}^{(2)} = -\frac{6EI_2}{L_{23}} \cdot \Psi_{23} = -\frac{6 \cdot EI}{4,2} \cdot \left(-\frac{1}{4,2}\right) = 0,3401 EI$$

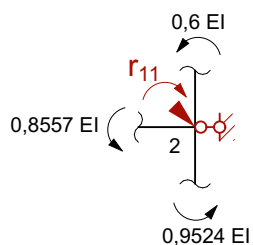
$$M_{24}^{(2)} = -\frac{3EI_2}{L_{24}} \cdot \Psi_{24} = -\frac{3 \cdot EI}{5} \cdot \frac{1}{5} = -0,12 EI$$

Wykres momentów zginających wywołany osiadaniem  $u_2 = 1$ :



## 7. Wyznaczanie $r_{ik}$

Równowaga momentów w węźle 2 w stanie  $\varphi_1 = 1$

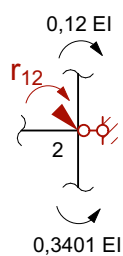


$$\sum M_2^{(1)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_{11} = 2,4081 EI$$

Równowaga momentów w węźle 2 w stanie  $u_2 = 1$

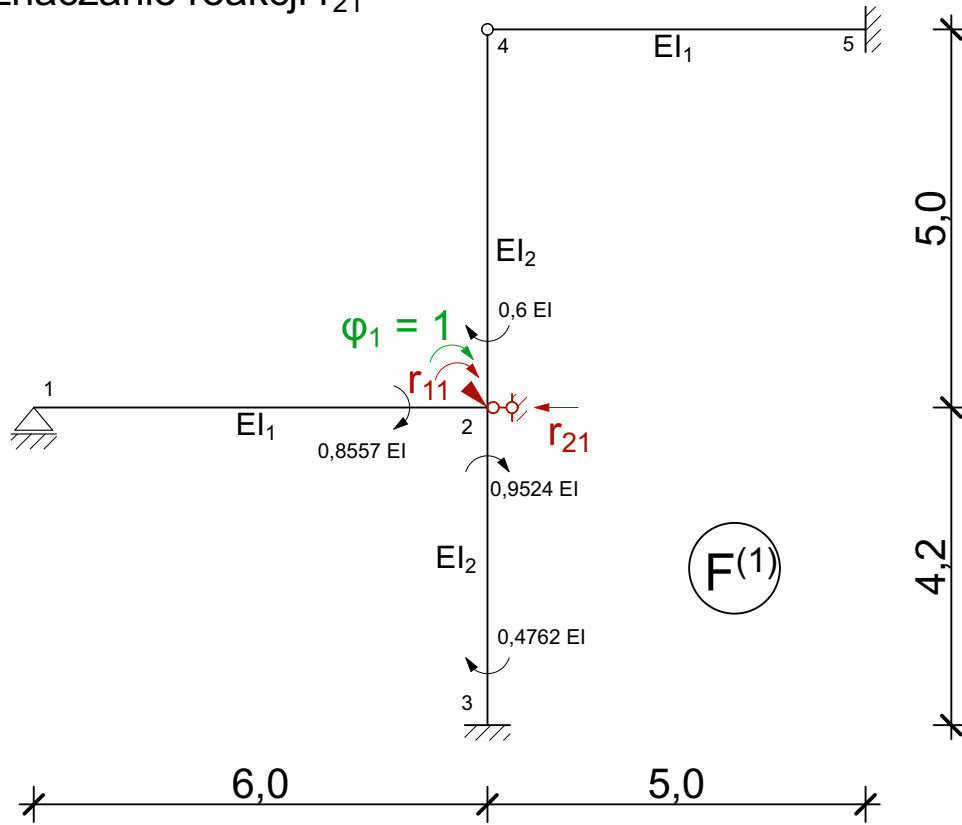


$$\sum M_2^{(2)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_{12} = 0,2201 EI$$

### Wyznaczanie reakcji $r_{21}$



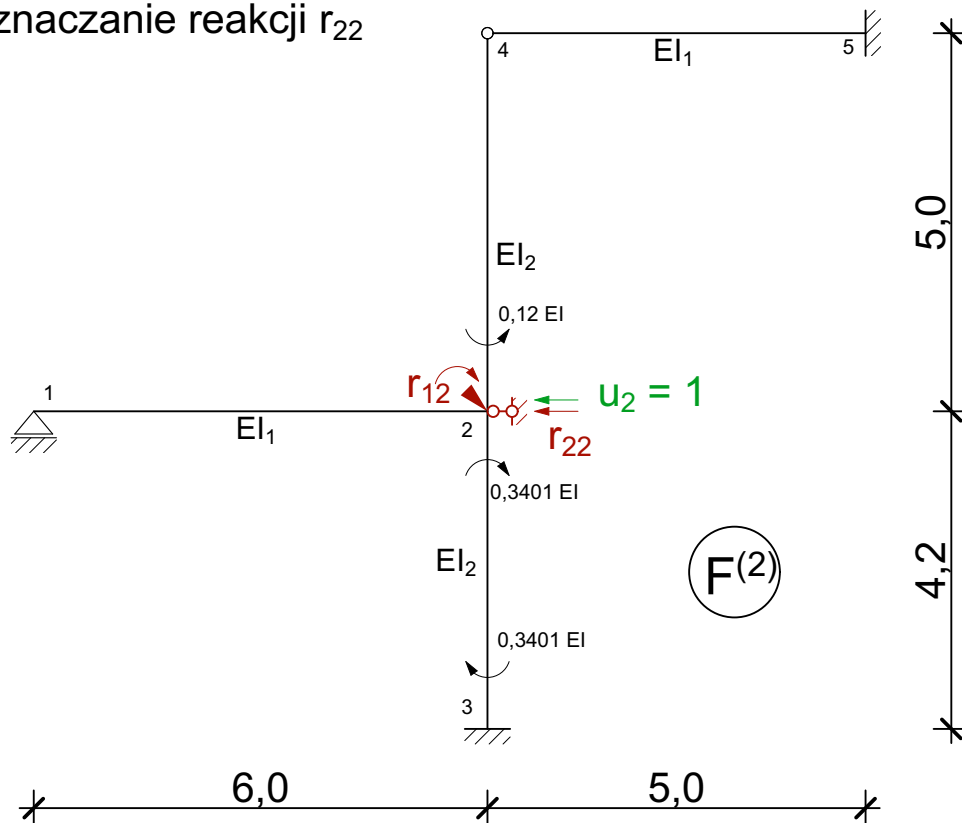
$$\sum_j R_j^{(1)} \cdot \delta_j + \sum_n M_{ik}^{(1)} \cdot \psi_{ik} = 0$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + 0,8557EI \cdot \bar{0} + (0,9524EI + 0,4762EI) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4,2}\right) + 0,6EI \cdot \frac{\bar{1}}{5} = 0$$

$$r_{21} = 0,2201EI$$

$$r_{21} = r_{12}$$

### Wyznaczanie reakcji $r_{22}$



$$\sum_j R_j^{(1)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_n M_{ik}^{(1)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{22} \cdot \bar{1} + (0,3401EI + 0,3401EI) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4,2}\right) + (-0,12EI) \cdot \frac{\bar{1}}{5} = 0$$

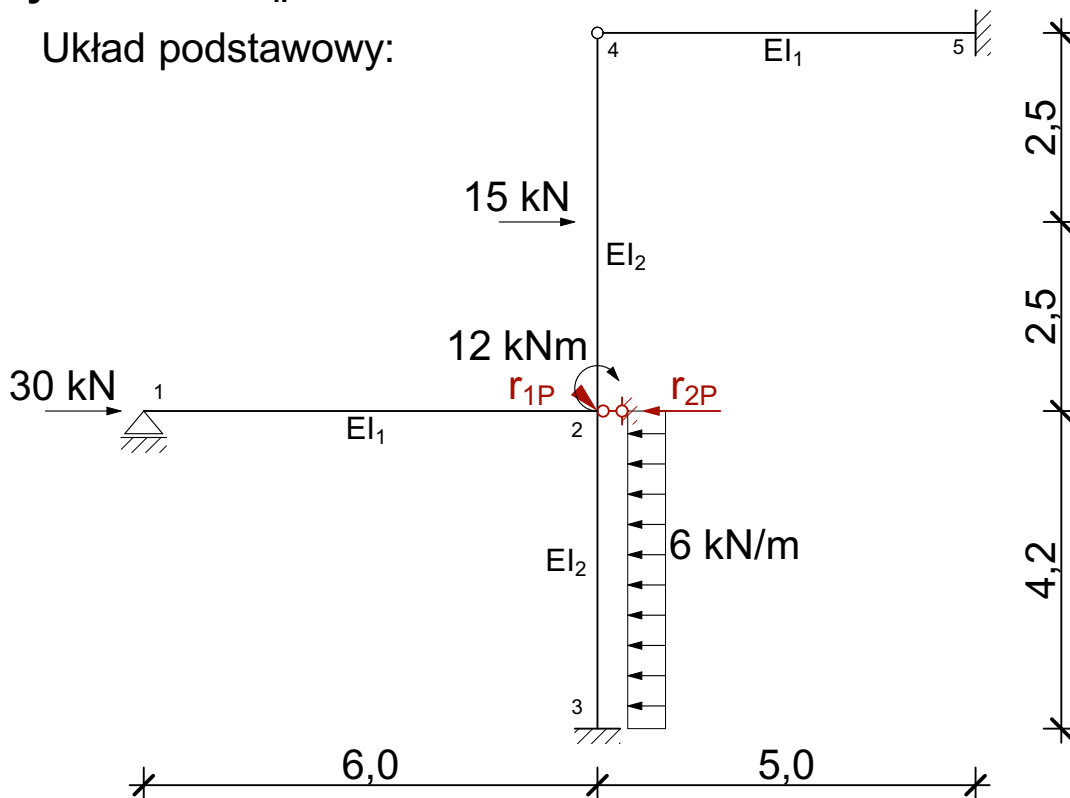
$$r_{22} = 0,1860EI$$

Macierz sztywności:

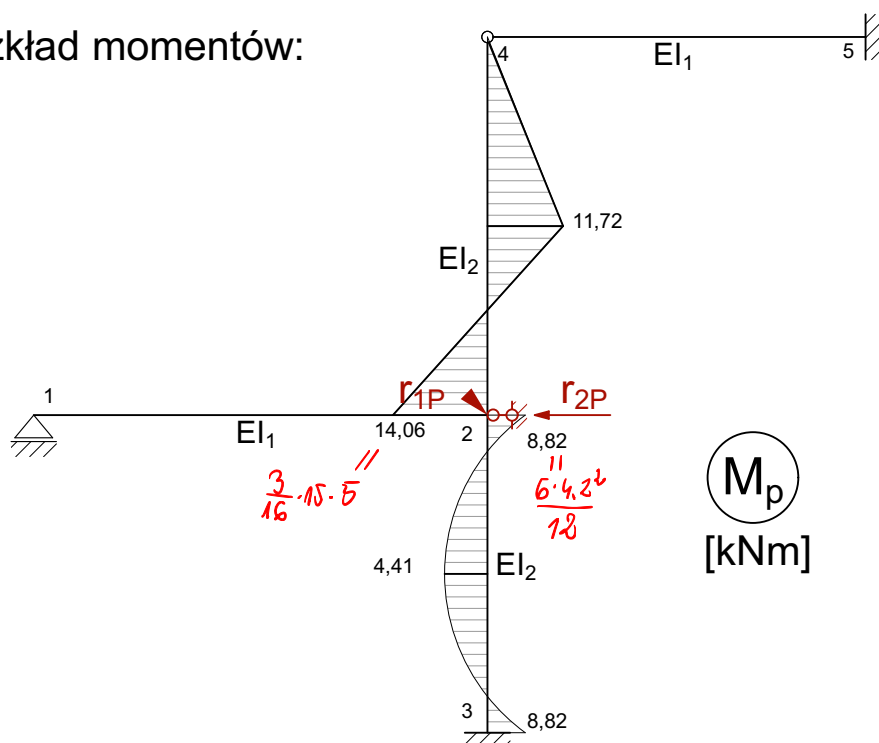
$$K = \begin{bmatrix} 2,4081 EI & 0,2201 EI \\ 0,2201 EI & 0,1860 EI \end{bmatrix}$$

## 8. Wyznaczanie $r_{iP}$

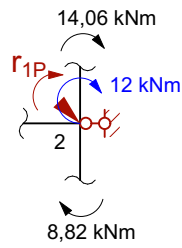
Układ podstawowy:



Rozkład momentów:



# Równowaga momentów w węźle 2 w stanie P



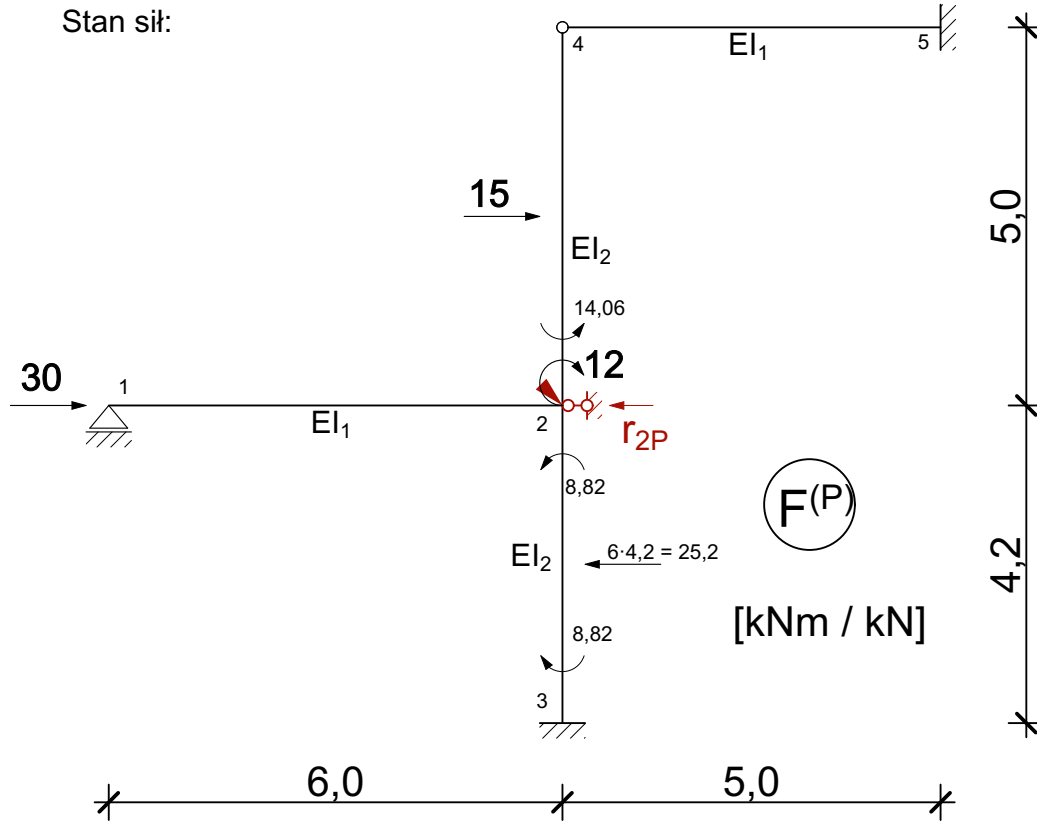
$$\sum M_2^{(P)} = 0$$

$$\Downarrow$$

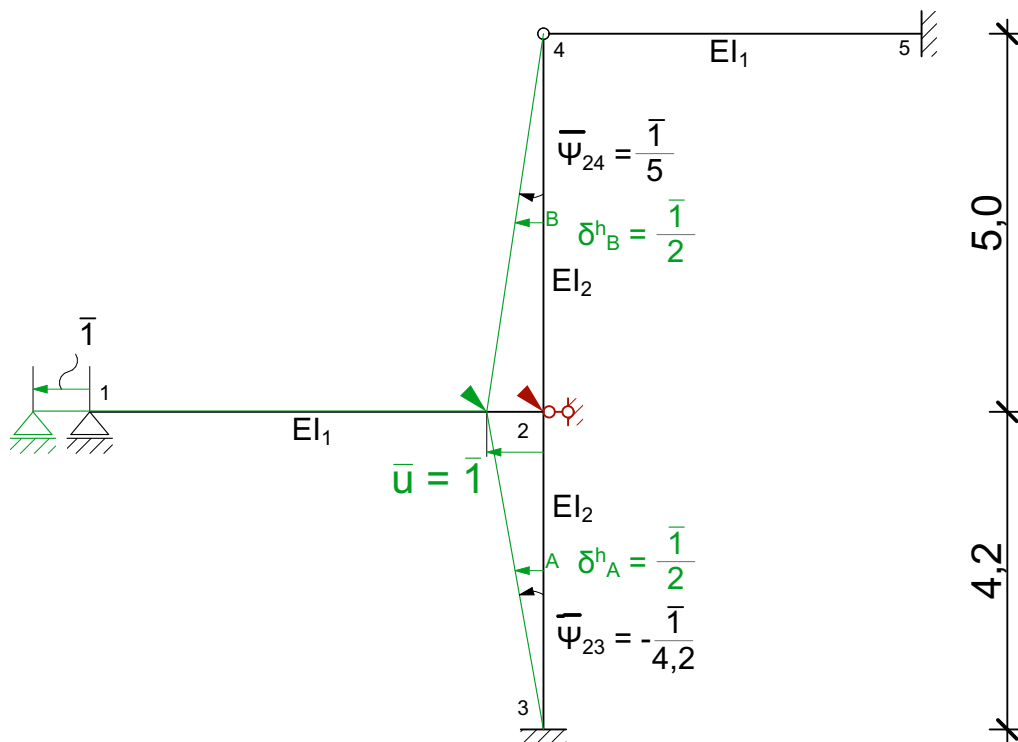
$$r_{1P} = -34,88 \text{ kNm}$$

## Wyznaczanie reakcji $r_{2P}$

Stan sił:



Stan przemieszczeń wirtualnych:





$$\sum_j R_j^{(P)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_k P_k^{(P)} \cdot \bar{\delta}_k + \sum_n M_{ik}^{(P)} \cdot \bar{\Psi}_{ik} = 0$$

$$r_{2P} \cdot \bar{1} + 25,2 \cdot \frac{\bar{1}}{2} - 30 \cdot \bar{1} - 15 \cdot \frac{\bar{1}}{2} + (-8,82 + 8,82) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4,2}\right) - 14,06 \cdot \frac{\bar{1}}{5} + 12 \cdot \bar{0} = 0$$

$$r_{2P} = 27,712 \text{ kN}$$

### 9. Wyznaczanie niewiadomych $\varphi_1$ i $u_2$

$$\begin{cases} 2,4081 EI \cdot \varphi_1 + 0,2201 EI \cdot u_2 - 34,88 = 0 \\ 0,2201 EI \cdot \varphi_1 + 0,1860 EI \cdot u_2 + 27,712 = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \frac{31,51}{EI}$$

$$u_2 = -\frac{186,2759}{EI} \text{ *dobrości obliczeń - j/w*}$$

### 10. Wyznaczanie rozkładu momentów zginających:

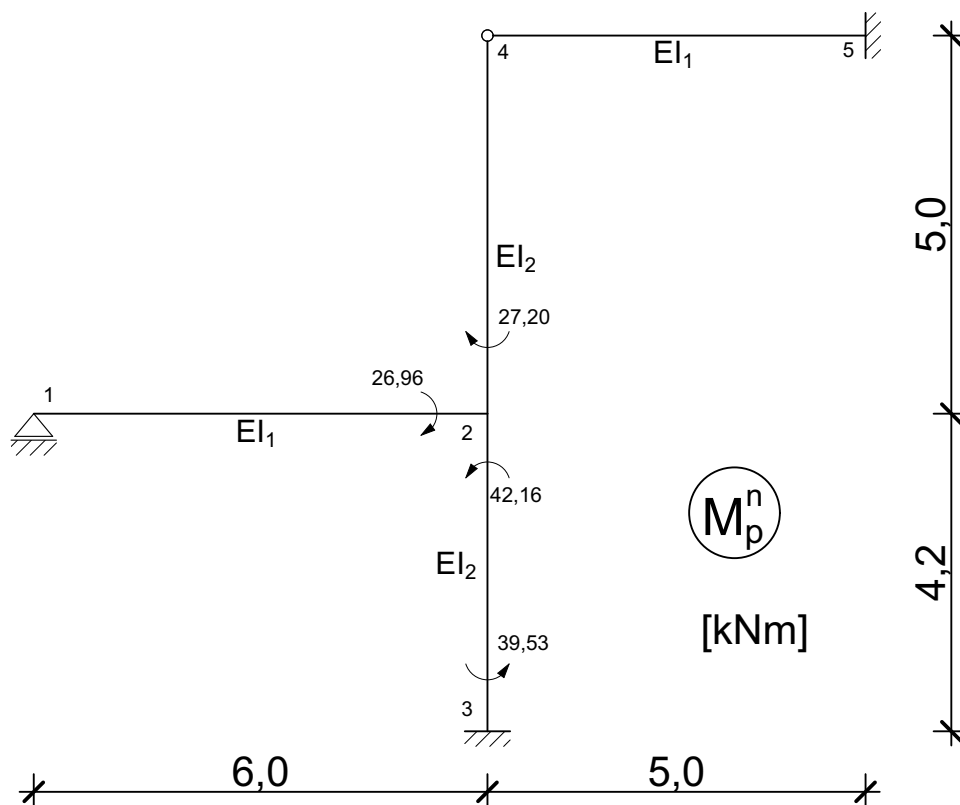
$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{ik}^{(2)} \cdot u_2 + M_{ik}^{(P)}$$

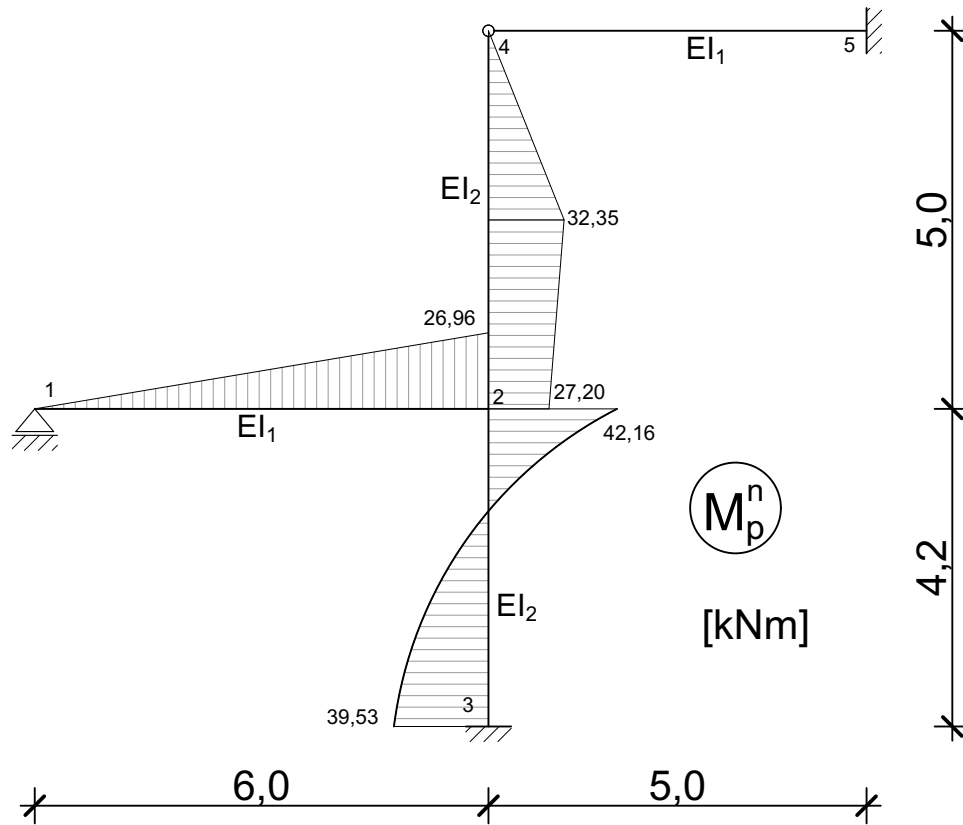
$$M_{21}^n = 0,8557 EI \cdot \left(\frac{31,51}{EI}\right) = 26,96 \text{ kNm}$$

$$M_{23}^n = 0,9524 EI \cdot \left(\frac{31,51}{EI}\right) + 0,3401 EI \cdot \left(-\frac{186,2759}{EI}\right) - 8,82 = -42,16 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^n = 0,4762 EI \cdot \left(\frac{31,51}{EI}\right) + 0,3401 EI \cdot \left(-\frac{186,2759}{EI}\right) + 8,82 = -39,53 \text{ kNm}$$

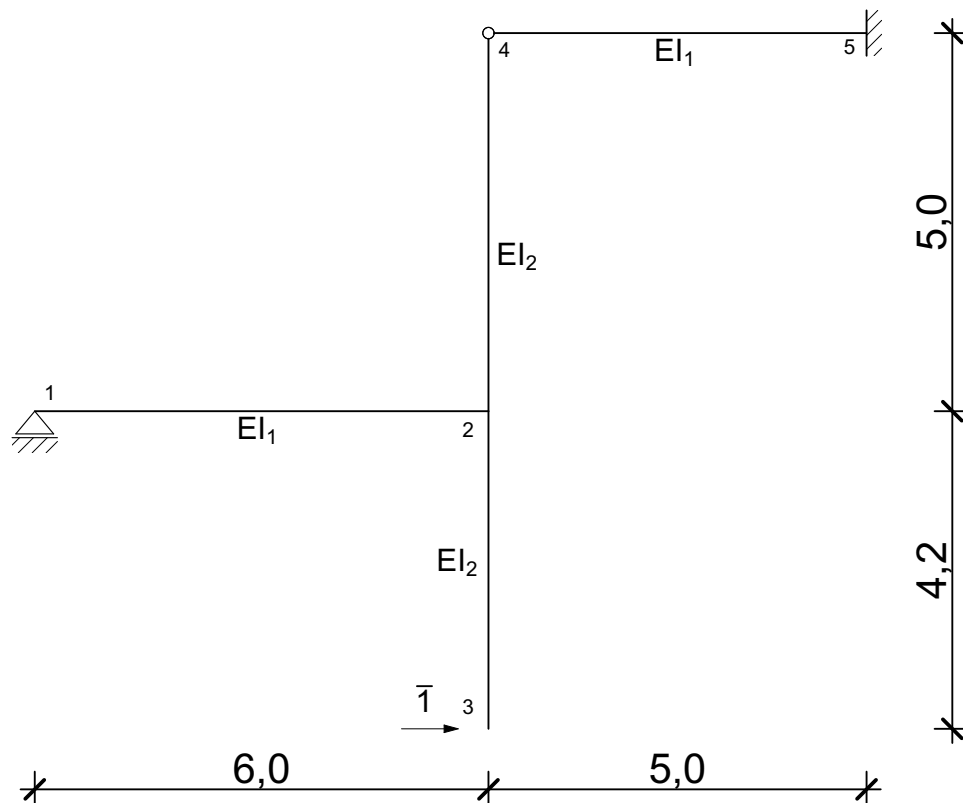
$$M_{24}^n = 0,6 EI \cdot \left(\frac{31,51}{EI}\right) + (-0,12 EI) \cdot \left(-\frac{186,2759}{EI}\right) - 14,06 = 27,20 \text{ kNm}$$

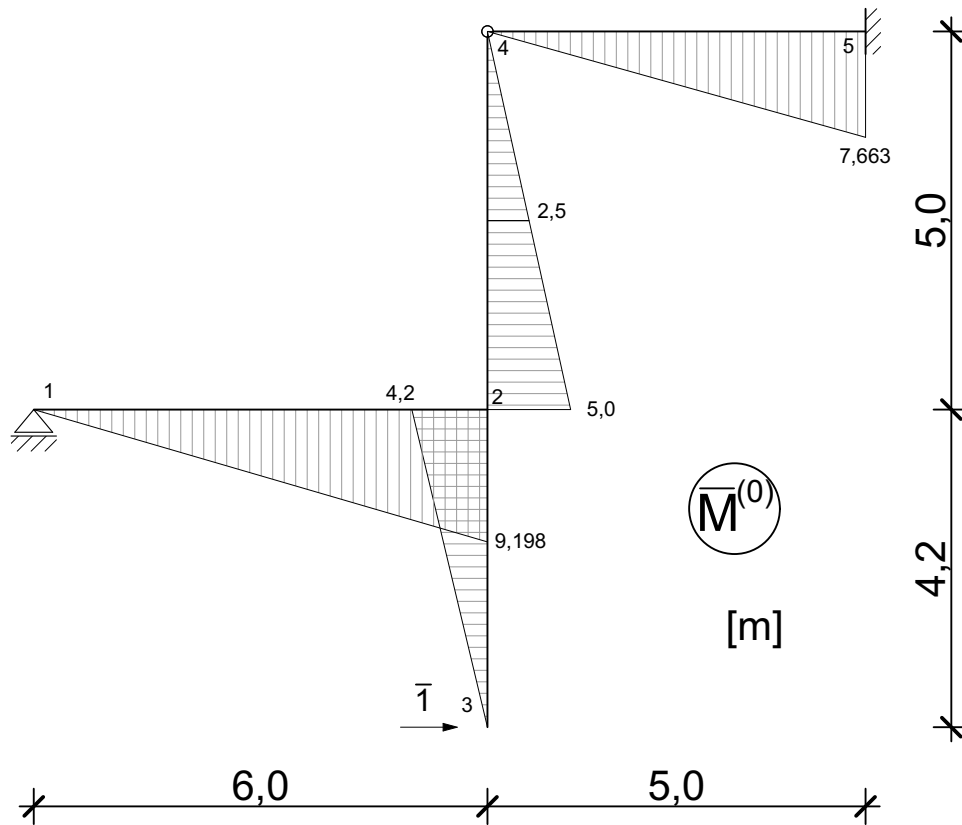




## 11. Kontrola kinematyczna:

Sprawdzenie przemieszczenia poziomego w węzle 3:





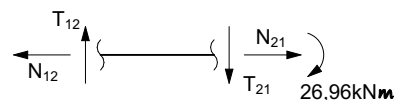
$$\begin{aligned}
 H_3 = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} \cdot dx &= \frac{1}{1,7114 \cdot EI} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 26,96 \cdot 6,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,198 \right] + \\
 &+ \frac{1}{EI} \left[ \frac{2}{3} \cdot 6,0 \cdot 4,2^2 / 8 \cdot 4,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,2 + \frac{1}{2} \cdot 39,53 \cdot 4,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,2 - \right. \\
 &- \frac{1}{2} \cdot 42,16 \cdot 4,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,2 + \frac{1}{2} \cdot 32,35 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 + \frac{1}{2} \cdot 32,35 \cdot 2,5 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2,5 + \frac{1}{3} \cdot 5,0) + \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \cdot 27,20 \cdot 2,5 \cdot (\frac{1}{3} \cdot 2,5 + \frac{2}{3} \cdot 5,0) \right] = \frac{1}{EI} \left[ -289,7956 + 77,7924 + 116,2182 - \right. \\
 &- 247,9098 + 67,3958 + 134,7917 + 141,6687 \left. \right] = \frac{0,1684}{EI} \approx 0
 \end{aligned}$$

## 12. Wyznaczanie rozkładu sił poprzecznych:

$$\sum M_1 = 0$$

$$26,96 - T_{12} \cdot 6 = 0$$

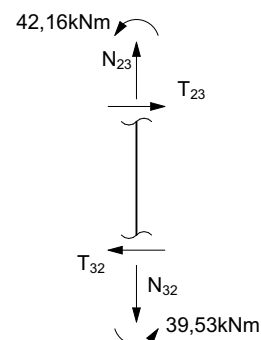
$$T_{12} = 4,493 \text{ kN}$$



$$\sum M_3 = 0$$

$$T_{23} \cdot 4,2 - 39,53 - 6 \cdot 4,2 \cdot 2,1 - 42,16 = 0$$

$$T_{23} = 32,05 \text{ kN}$$



$$\sum M_2 = 0$$

$$T_{32} \cdot 4,2 - 39,53 + 6 \cdot 4,2 \cdot 2,1 - 42,16 = 0$$

$$T_{32} = 6,85 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = 0$$

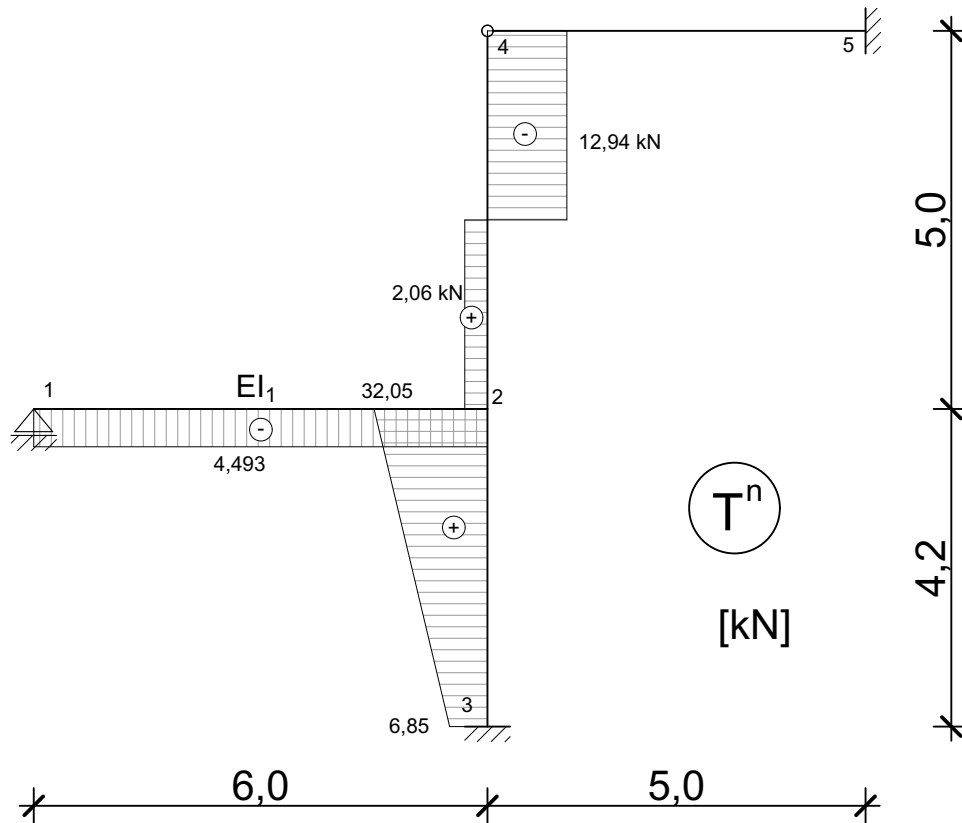
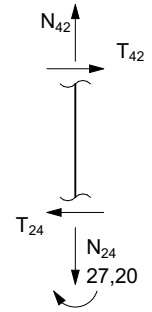
$$T_{24} \cdot 5 - 15 \cdot 2,5 + 27,2 = 0 \quad T_{24} = 2,06 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$T_{42} \cdot 5 + 15 \cdot 2,5 + 27,2 = 0 \quad T_{42} = -12,94 \text{ kN}$$

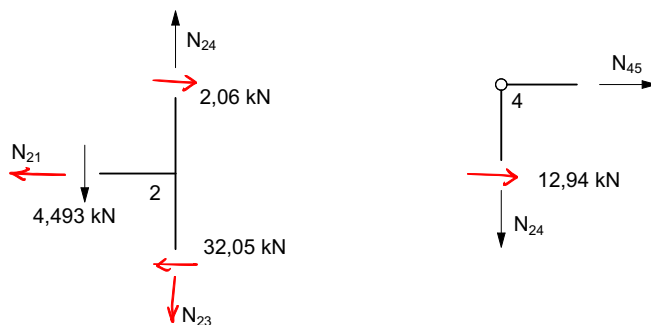
$$\sum M_5 = 0$$

$$T_{54} = 0$$



### 13. Wyznaczanie sił normalnych:

Równowaga węzła nr 2 i przegubu:



$$\sum X = 0$$

$$N_{21} - 2,06 + 32,05 = 0$$

$$N_{21} = -29,99 \text{ kN}$$

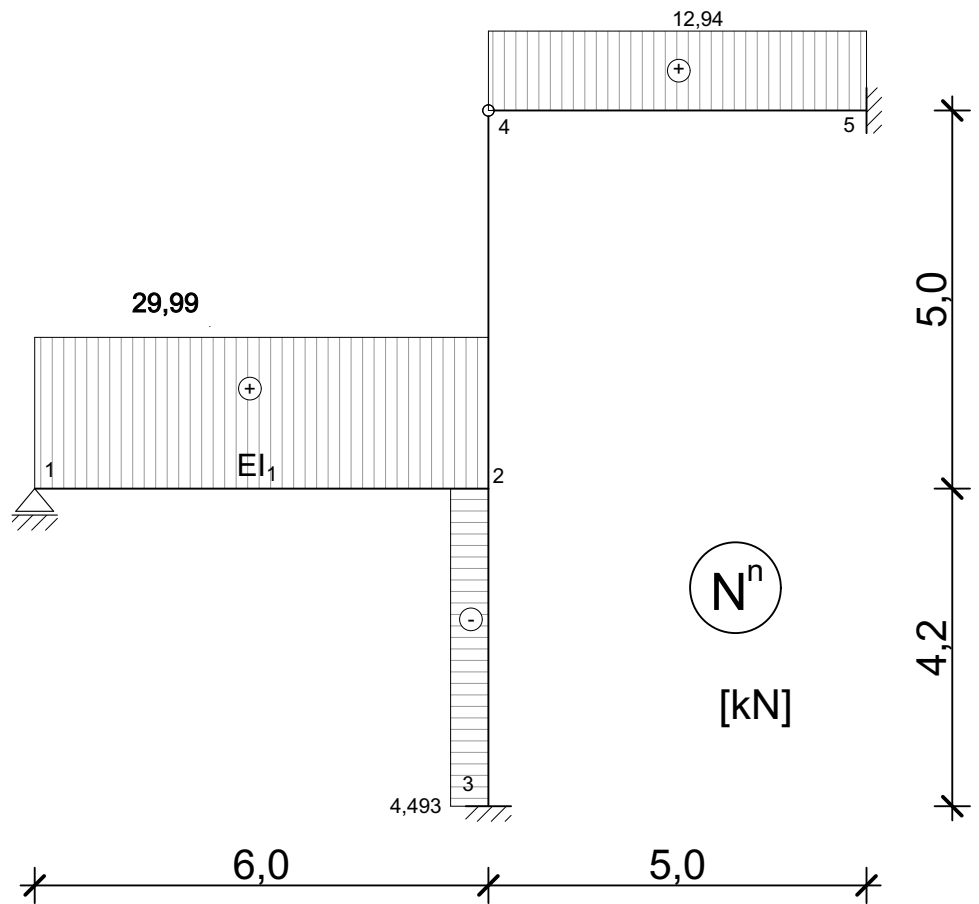
$$N_{24} = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$N_{23} - 4,493 = 0$$

$$N_{23} = 4,493 \text{ kN}$$

$$N_{45} = 12,94 \text{ kN}$$



#### 14. Reakcje:

$$V_1 = 4,493 \text{ kN}$$

$$M_3 = 39,53 \text{ kNm}$$

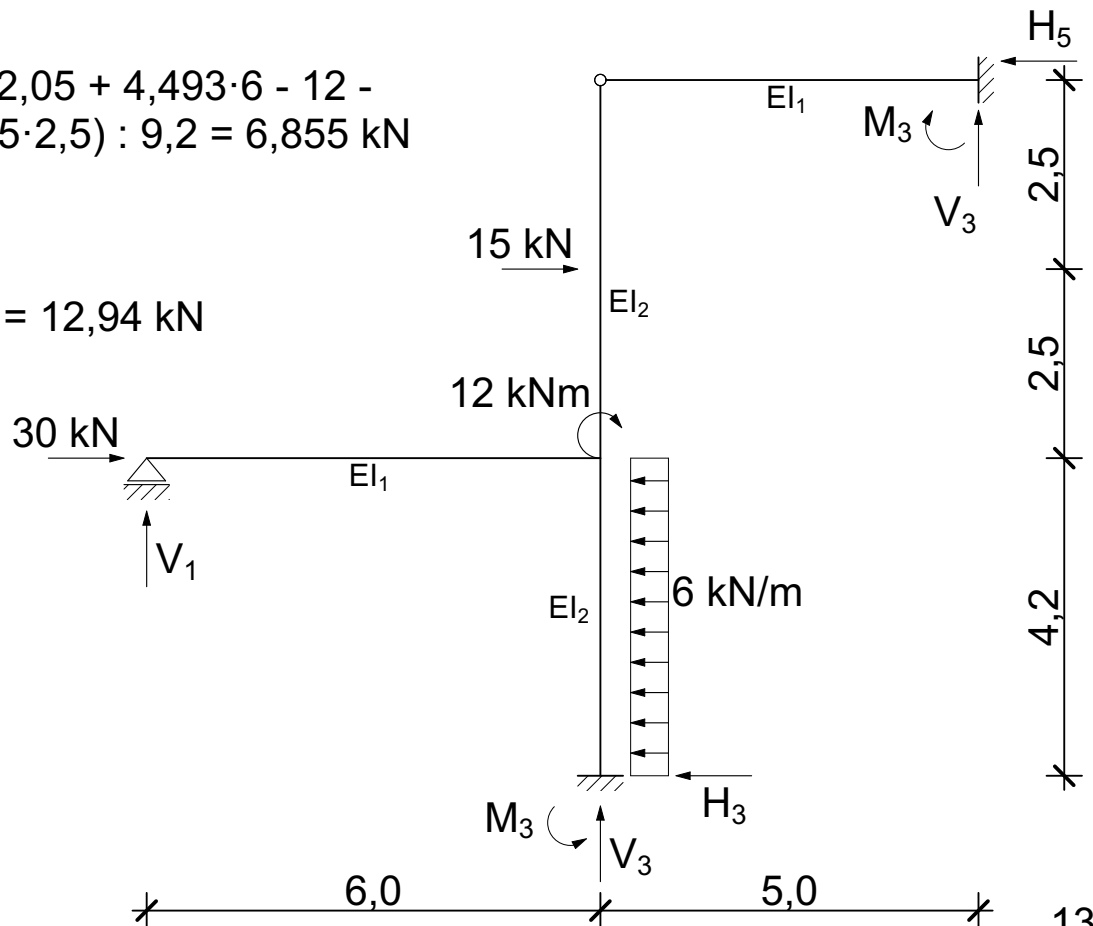
$$V_3 = 4,493 \text{ kN}$$

$$H_3 = (30 \cdot 5 + 32,05 + 4,493 \cdot 6 - 12 - 6 \cdot 4,2 \cdot 7,1 + 15 \cdot 2,5) : 9,2 = 6,855 \text{ kN}$$

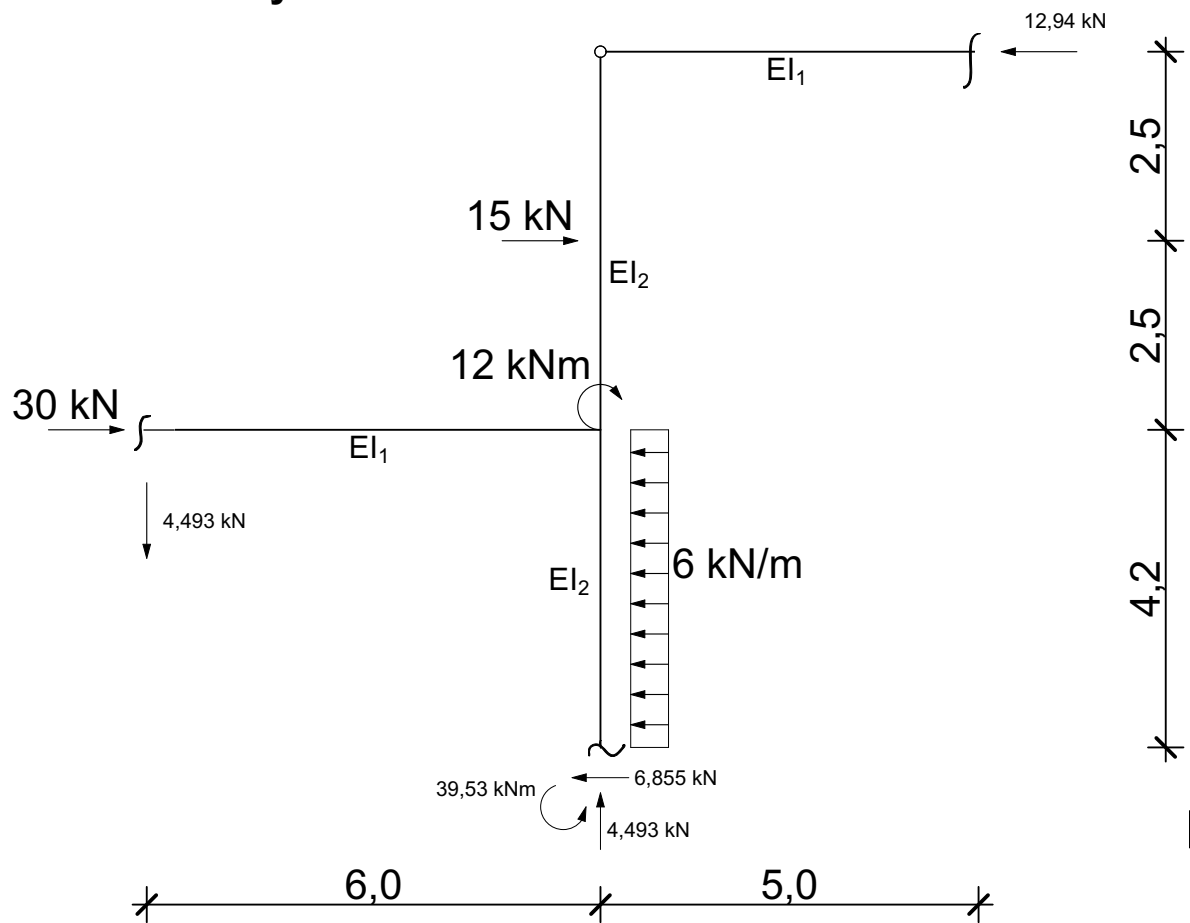
$$M_5 = 0$$

$$V_5 = 0$$

$$H_5 = 15 - 2,06 = 12,94 \text{ kN}$$



## 14. Kontrola statyczna:



$$\sum X = 30 + 15 - 6 \cdot 4,2 - 12,94 - 6,855 = 0,005 \approx 0$$

$$\sum Y = 4,493 - 4,493 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_2 = & 6,855 \cdot 4,2 - 39,53 + 6 \cdot 4,2 \cdot 2,1 + 12 - 4,493 \cdot 6 + \\ & + 15 \cdot 2,5 - 12,94 \cdot 5 = 0,023 \approx 0 \end{aligned}$$

## 15. Sprawdzenie naprężeń normalnych wywołanych momentem zginającym:

Dla wstępnie przyjętego  $I_1$  (HEB280)

$$W_x = 1\,380,0 \text{ cm}^3$$

$$M_{\max} = 26,96 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{2\,696,0 \text{ kNcm}}{1\,380,0 \text{ cm}^3} = 1,954 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 19,54 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} < \sigma_{\text{dop}} = 215 \text{ MPa}$$

Dla wstępnie przyjętego  $I_2$  (HEB240)

$$W_x = 938,0 \text{ cm}^3$$

$$M_{\max} = 42,16 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{4\,216,0 \text{ kNcm}}{938,0 \text{ cm}^3} = 4,495 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 44,95 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} < \sigma_{\text{dop}} = 215 \text{ MPa}$$

Przyjęte przekroje spełniają warunek wytrzymałościowy ze znacznym zapasem nośności. Przyjęcie mniejszych przekrojów prętów pozwoliłoby na lepsze wykorzystanie nośności prętów. Zmiana przekrojów prętów powoduje zmianę współczynnika  $n$  ( $n=I_2/I_1$ ), od którego zależą wartości momentów zginających, zatem obliczenia należałoby powtórzyć i powtórnie sprawdzić naprężenia w obu grupach:  $I_1$  i  $I_2$ .