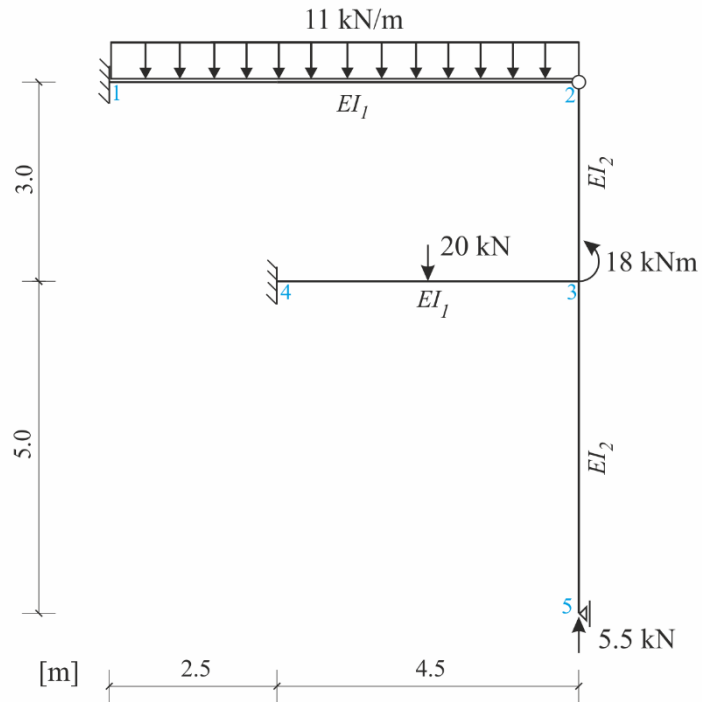


ĆWICZENIE NR 1

METODA PRZEMIESZCZEŃ

1. PRZYJĘCIE PRZEKROJI Z PROFILI DWUTEOWYCH

Schemat ramy płaskiej wraz z zadaniem obciążeniem przedstawiono na Rys. 1.



Rys.1. Schemat statyczny ramy

Dla układu zostały przyjęte przekroje I_1 i I_2 :

I_1 – profil dwuteowy: HEB 180, $I_1 = 3830 \text{ cm}^4$, $w_1 = 425,7 \text{ cm}^3$

I_2 – profil dwuteowy: HEB 220, $I_2 = 8090 \text{ cm}^4$, $w_2 = 735,5 \text{ cm}^3$

2. ROZWIĄZANIE

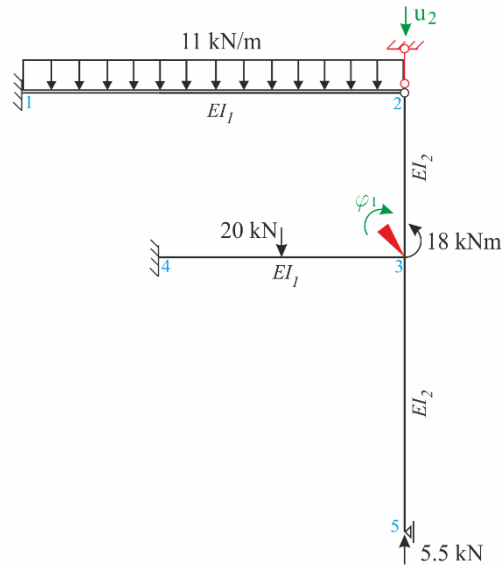
1. Stopień geometrycznej niewyznaczalności i układ podstawowy

$$\text{SGN} = n_\varphi + n_A,$$

W rozpatrywanym układzie: $n_\varphi = 1$, $n_A = 1$, stąd stopień geometrycznej niewyznaczalności:

$$\text{SGN} = 1 + 1 = 2.$$

Układ podstawowy:



Rys.2. Układ podstawowy

2. Układ równań kanonicznych

$$\begin{cases} r_{11}\varphi_1 + r_{12}u_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21}\varphi_1 + r_{22}u_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Macierz sztywności

$$\mathbf{K} = [r_{ik}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

Interpretacja elementów macierzy sztywności – rys.3.

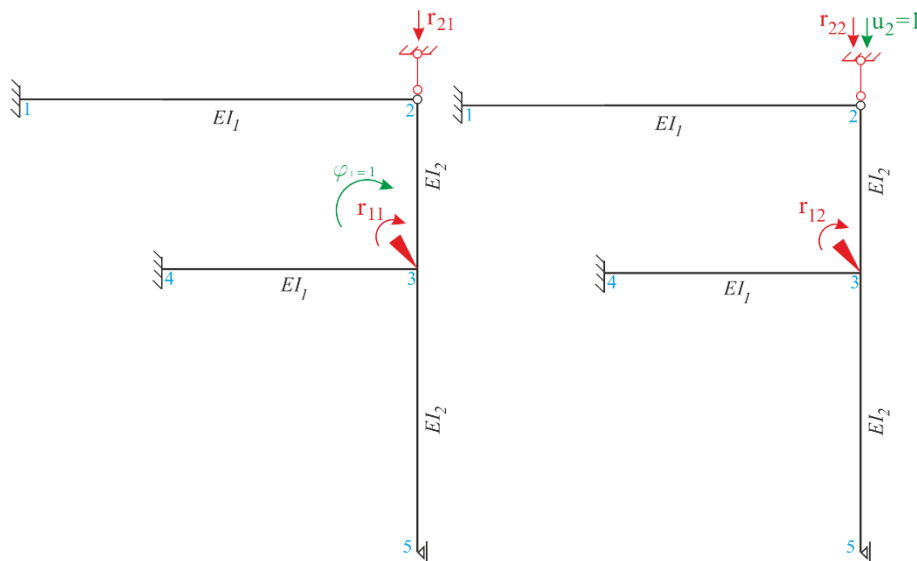
4. Sztywność porównawcza

$$EI_1 = EI$$

$$n = I_2 / I_1 = 8090 / 3830 = 2,112$$

$$EI_2 = 2,112 \cdot EI$$

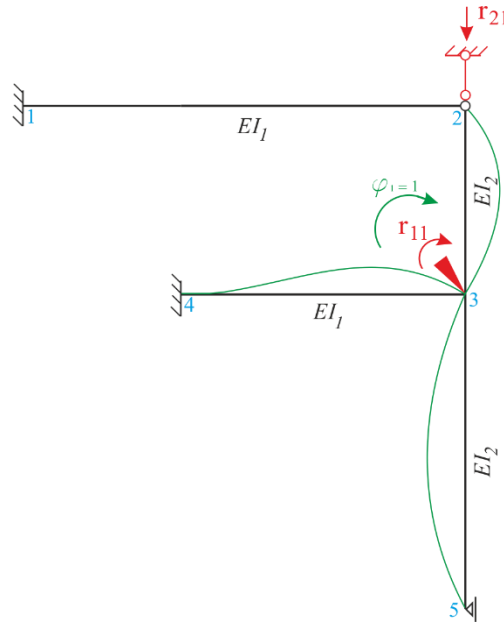
*dokładność obliczeń
4 cyfry znaczące
jest wystarczająca*



Rys.3. Interpretacja elementów macierzy sztywności

5. Wyznaczenie współczynników r_{ik} macierzy sztywności

5.1. Stan $\varphi_1 = 1$



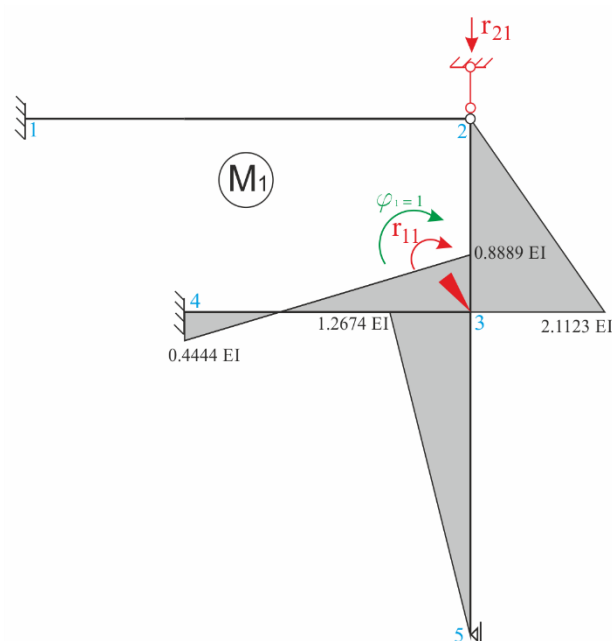
Rys.4. Deformacja układu podstawowego wywołana przemieszczeniem $\varphi_1 = 1$

$$M_{32}^{(1)} = \frac{3EI_2}{L_{23}} = \frac{3 \cdot 2,112 \cdot EI}{3} = 2,112 \cdot EI$$

$$M_{35}^{(1)} = \frac{3EI_2}{L_{35}} = \frac{3 \cdot 2,112 \cdot EI}{5} = 1,267 \cdot EI$$

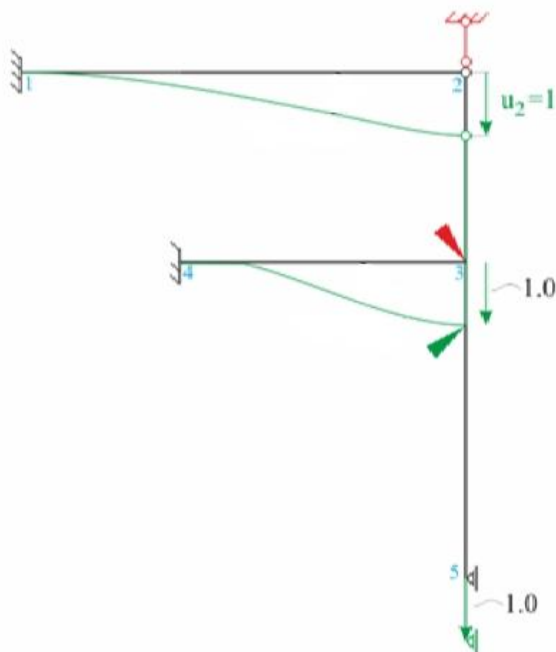
$$M_{34}^{(1)} = \frac{4EI_1}{L_{34}} = \frac{4EI}{4,5} = 0,8889 \cdot EI$$

$$M_{43}^{(1)} = \frac{2EI_1}{L_{34}} = \frac{2EI}{4,5} = 0,4444 \cdot EI$$

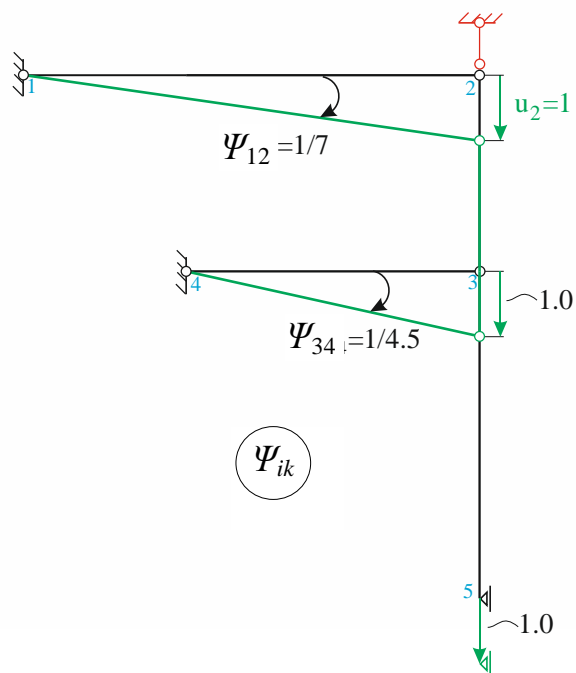


Rys.5. Rozkład momentów zginających wywołany osiadciami $\varphi_1 = 1$

5.2. Stan $u_2 = 1$



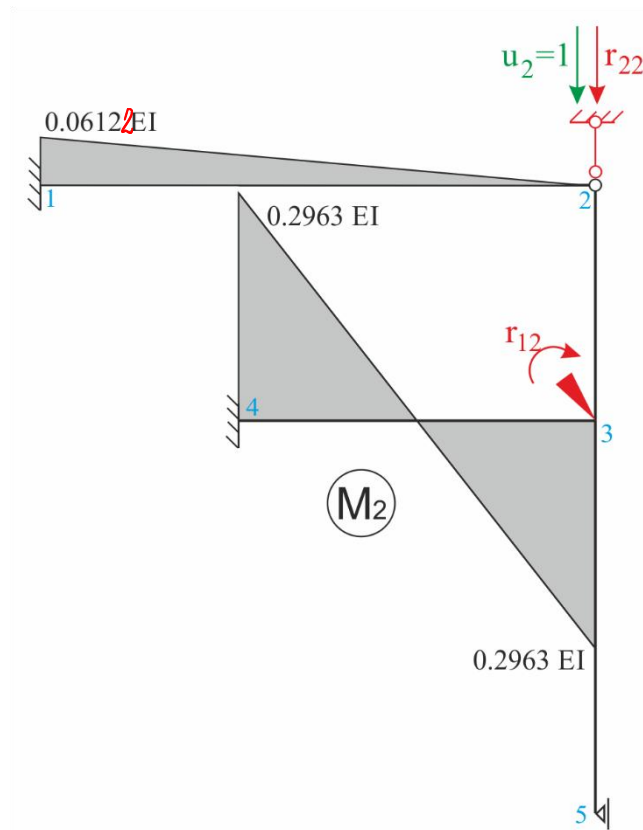
Rys.6. Deformacja układu podstawowego wywołana osiadciami $u_2 = 1$



Rys.7. Kąty obrotu cięciw prętów wywołane osiadciami $u_2 = 1$

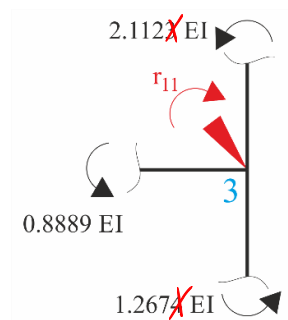
$$M_{12}^{(2)} = -\frac{3EI_1}{L_{12}} \cdot \psi_{12} = -\frac{3 \cdot EI}{7} \cdot \frac{1}{7} = -0,06122EI$$

$$M_{43}^{(2)} = M_{34}^{(2)} = -\frac{6EI_1}{L_{34}} \cdot \psi_{34} = -\frac{6 \cdot EI}{4,5} \cdot \frac{1}{4,5} = -0,2963EI$$



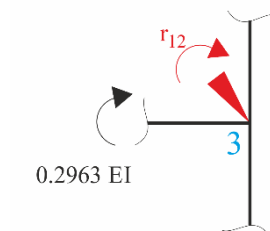
Rys.8. Rozkład momentów zginających wywołany osiadaniem $u_2 = 1$

5.3. Wyznaczenie r_{ik}



Rys.9. Równowaga momentów w węźle 3 w stanie $\varphi_1 = 1$

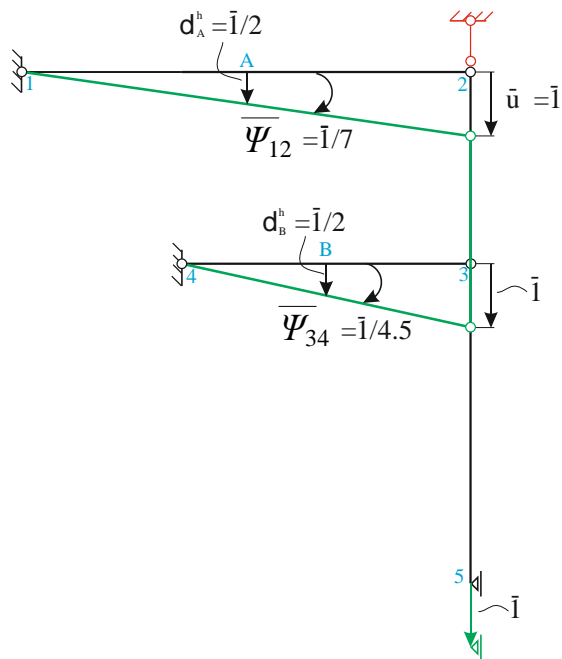
$$\Sigma M_3^{(1)} = 0 \Rightarrow r_{11} = 4,268 EI$$



Rys.10. Równowaga momentów w węźle 3 w stanie $u_2 = 1$

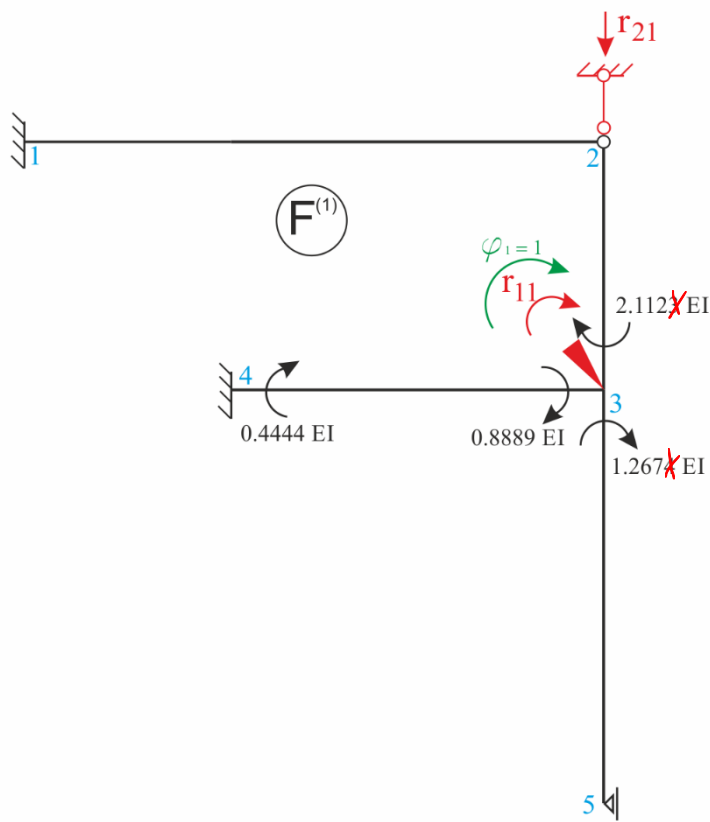
$$\Sigma M_3^{(2)} = 0 \Rightarrow r_{12} = -0,2963 EI$$

Wyznaczenie reakcji r_{21} , r_{22} – równanie pracy wirtualnej



Rys.11. Wirtualny stan przemieszczeń do wyznaczenia r_{2i} za pomocą RPW

Wyznaczenie reakcji r_{21}



Rys.12. Stan sił do wyznaczenia r_{21}

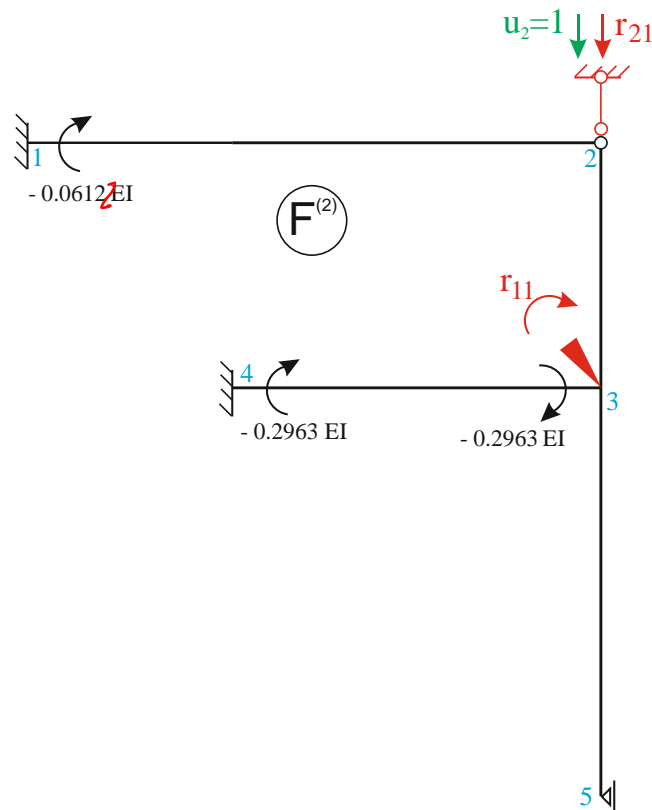
Równanie pracy wirtualnej:

$$\sum_j R_j^{(1)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_n M_{ik}^{(1)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0,$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + 2,112 \cancel{EI} \cdot \bar{0} + 1,267 \cancel{EI} \cdot \bar{0} + (0,8889 EI + 0,4444 EI) \cdot \bar{1}/4,5 = 0$$

$$r_{21} = -0,2963 EI.$$

Wyznaczenie reakcji r_{22}



Rys.13. Stan sił do wyznaczenia r_{22}

Równanie pracy wirtualnej:

$$\sum_j R_j^{(2)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_n M_{ik}^{(2)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

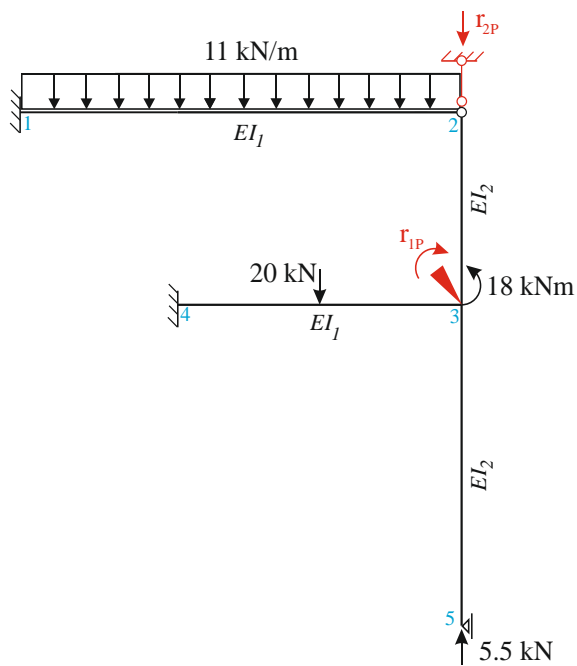
$$r_{22} \cdot \bar{1} + (-0,06122 EI) \cdot \bar{1}/7 + (-0,2963 EI - 0,2963 EI) \cdot \bar{1}/4,5 = 0$$

$$r_{22} = 0,1404 EI.$$

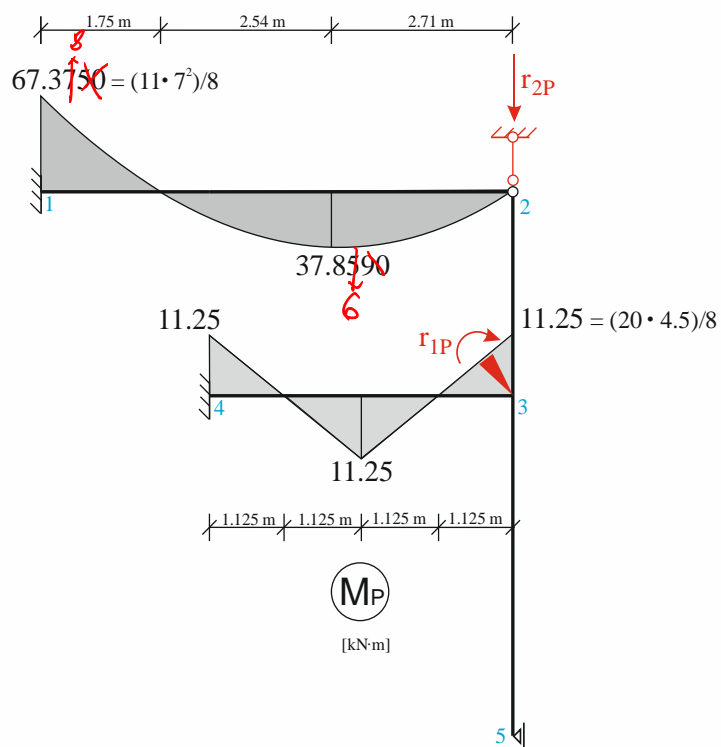
Macierz sztywności:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4,268 \cancel{EI} & -0,2963 EI \\ -0,2963 EI & 0,1404 EI \end{bmatrix}.$$

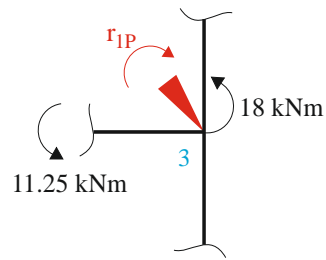
6. Wyznaczenie współczynników r_{iP}



Rys.14. Układ podstawowy obciążony siłami zewnętrznymi



Rys.15. Rozkład momentów zginających wywołany zadaniem obciążeniem zewnętrznym

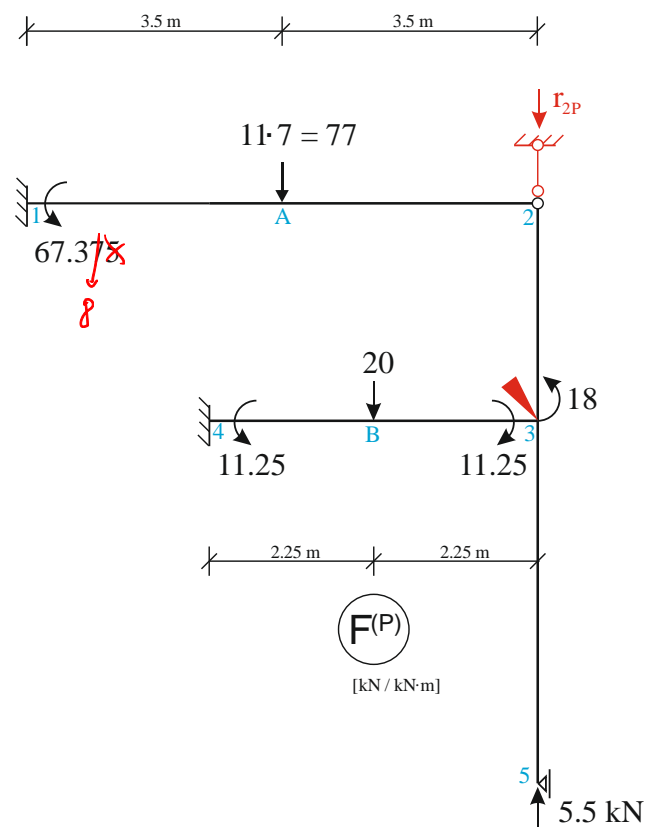


Rys.16. Równowaga momentów węzła w stanie „P”

$$\Sigma M_3^{(P)} = 0 \Rightarrow r_{1P} = 29,25 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

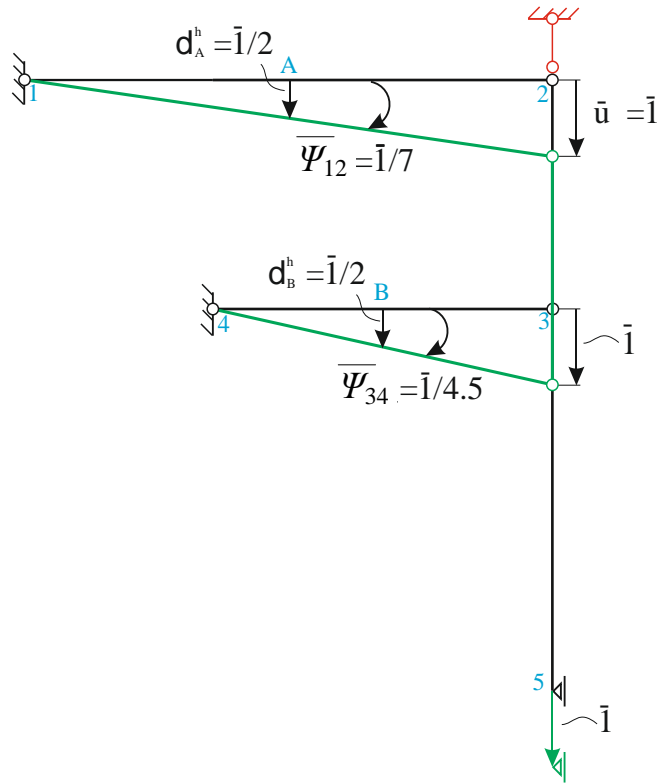
Wyznaczenie reakcji r_{2P} – równanie pracy wirtualnej.

Stan sił:



Rys.17. Stan sił do wyznaczenia r_{2P}

Stan przemieszczeń wirtualnych:



Rys.18. Wirtualny stan przemieszczeń do wyznaczenia r_{2P}

Równanie pracy wirtualnej:

$$\sum_j R_j^{(P)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_k P_k^{(P)} \cdot \bar{\delta}_k + \sum_n M_{ik}^{(P)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0.$$

$$r_{2P} \cdot \bar{1} - 5,5 \cdot \bar{1} + 77 \cdot \bar{1}/2 + 20 \cdot \bar{1}/2 - 18 \cdot \bar{0} - 67,375 \cdot \bar{1}/7 + (-11,25 + 11,25) \cdot \bar{1}/4,5 = 0$$

$$r_{2P} = -33,375 \text{ kN.}$$

7. Wyznaczenie niewiadomych φ_1 i u_2

Po podstawieniu współczynników r_{ik} oraz r_{iP} do układu równań kanonicznych, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 4,2686 EI \varphi_1 - 0,2963 EI u_2 + 29,25 = 0 \\ -0,2963 EI \varphi_1 + 0,1404 EI u_2 - 33,375 = 0 \end{cases}$$

W zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} 4,2686 EI & -0,2963 EI \\ -0,2963 EI & 0,1404 EI \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29,25 \\ -33,375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\varphi_1 = \frac{11,231}{EI},$$

$$u_2 = \frac{261,352}{EI}.$$

8. Wyznaczenie rozkładu momentów zginających

Ostateczne wartości momentów zgodnie z zasadą superpozycji:

$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{ik}^{(2)} \cdot u_2 + M_{ik}^{(P)},$$

czyli:

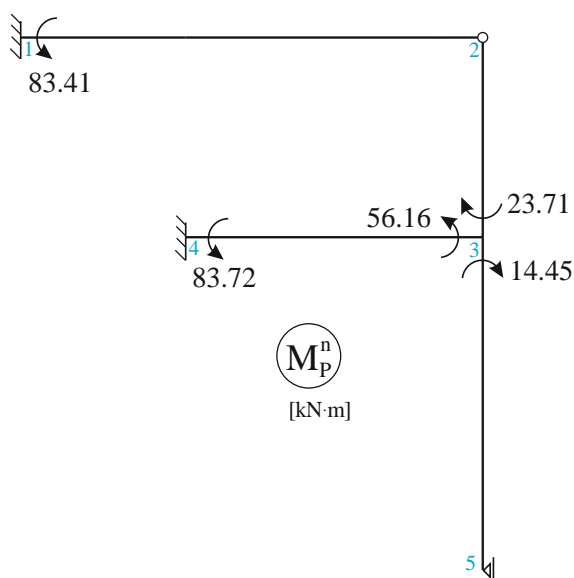
$$M_{12}^n = M_{12}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{12}^{(2)} \cdot u_2 + M_{12}^{(P)},$$

$$M_{32}^n = M_{32}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{32}^{(2)} \cdot u_2 + M_{32}^{(P)},$$

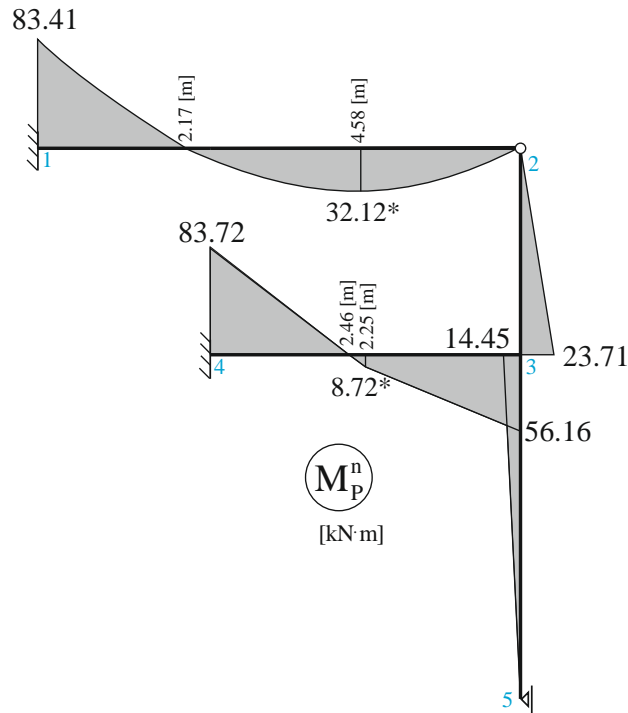
...

itd., a zatem wykonując obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym excel otrzymamy (po uproszczeniu EI):

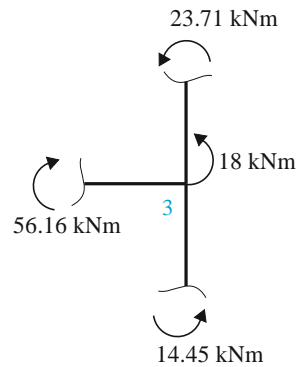
ik	$M_{ik}^{(1)}$	$M_{ik}^{(2)}$	$M_{ik}^{(P)}$	M_{ik}^n
12	0,0000	-0,0612	-67,37	-83,41
32	2,1123	0,0000	0,000	23,70
34	0,8889	-0,2963	11,25	-56,15
43	0,4444	-0,2963	-11,25	-83,71
35	1,2674	0,0000	0,000	14,45



Rys.19. Momenty rzeczywiste – wartości momentów na końcach prętów



Rys.20. Rozkład momentów rzeczywistych (*wartości doliczone po wyznaczeniu sił poprzecznych)



Rys.21. Sprawdzenie węzła nr 3

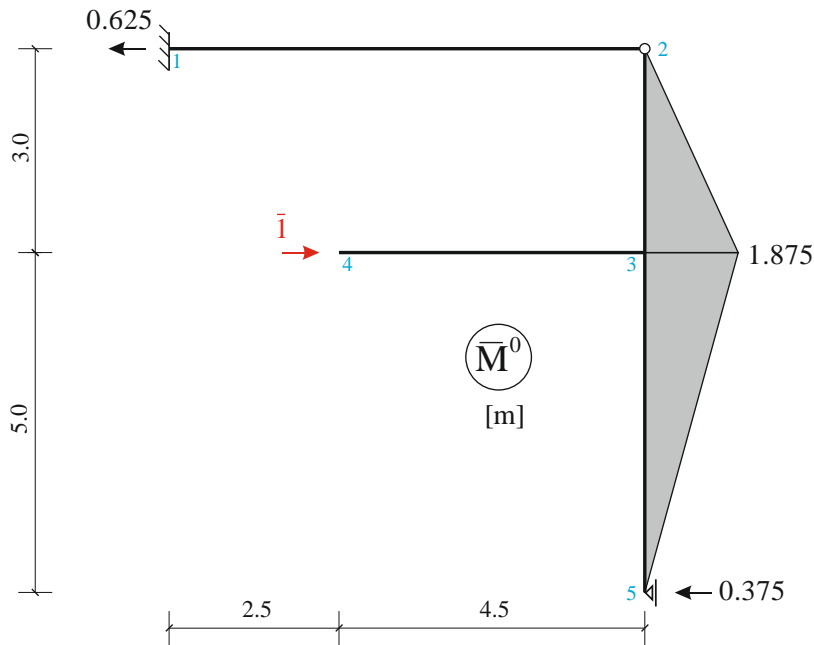
$$\Sigma M_{w_3} = 56,16 - 14,45 - 18 - 23,71 = 0,00 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

9. Kontrola kinematyczna

Równanie pracy wirtualnej przy wirtualnym stanie sił z twierdzeniem redukcyjnym:

$$\bar{1} \cdot \delta = \sum \int \bar{M}^0 \cdot \frac{M_P^n}{EI} dx$$

Obliczymy przemieszczenie poziome w węźle nr 4.



Rys.22. Rozkład momentów zginających od obciążenia wirtualnego do kontroli kinematycznej

$$\bar{1} \cdot \delta_4^h = \int \frac{M_P^{(n)} \cdot \bar{M}^{(0)}}{EI} dx =$$

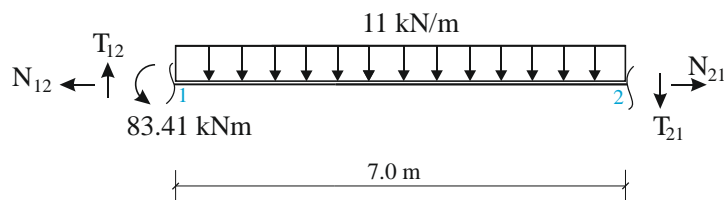
$$= \frac{\bar{1}}{2,1123/EI} [(1/2 \cdot 23,7083 \cdot 3 \cdot 2/3 \cdot 1,875) - (1/2 \cdot 14,4515 \cdot 5 \cdot 2/3 \cdot 1,875)] = \frac{-0,7078}{2,1123/EI} = \frac{-0,3351}{EI}$$

$$|\delta_4^h| < \frac{1}{EI} \rightarrow \delta_4^h \approx 0.$$

Wykres M_P^0 można uznać za poprawny.

10. Wyznaczenie rozkładu sił poprzecznych

- pręt 1-2



Rys.23. Układ sił dla wyciętego pręta 1-2

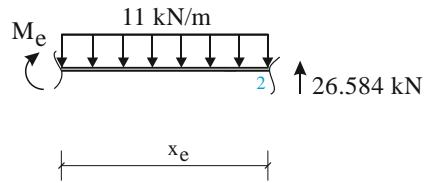
$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow T_{21} \cdot 7 - 83,41 + 11 \cdot 7 \cdot 3,5 = 0,$$

$$T_{21} = -26,58 \text{ kN},$$

$$\Sigma M_2 = 0 \rightarrow T_{12} \cdot 7 - 83,41 - 11 \cdot 7 \cdot 3,5 = 0,$$

$$T_{12} = 50,42 \text{ kN},$$

- wartość momentu ekstremalnego



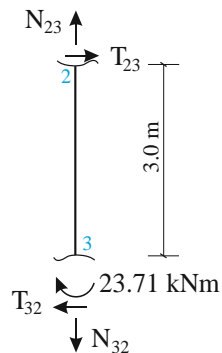
Rys.24. Schemat do wyznaczenia momentu ekstremalnego

$$x_e^P = \frac{|T^P|}{q} = \frac{|T_{21}|}{q} = \frac{26,584}{11} = 2,42 \text{ m}$$

$$\Sigma M_d = 0 \rightarrow M_e - 26,584 \cdot 2,42 + 11 \cdot 2,42 \cdot 1,21 = 0,$$

$$M_e = 32,128 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

- pręt 2-3



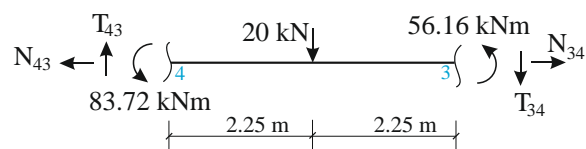
Rys.25. Układ sił dla wyciętego pręta 2-3

$$\Sigma M_2 = 0 \rightarrow T_{32} \cdot 3 + 23,71 = 0,$$

$$T_{32} = -7,903 \text{ kN},$$

$$\Sigma P_y = 0 \rightarrow T_{23} = T_{32} = -7,903 \text{ kN}.$$

- pręt 3-4



Rys.26. Układ sił dla wyciętego pręta 3-4

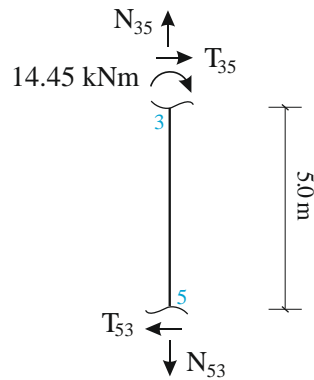
$$\Sigma M_3 = 0 \rightarrow T_{43} \cdot 4,5 - 83,72 - 56,16 - 20 \cdot 2,25 = 0,$$

$$T_{43} = 41,084 \text{ kN},$$

$$\Sigma M_4 = 0 \rightarrow T_{34} \cdot 4,5 - 83,72 - 56,16 + 20 \cdot 2,25 = 0,$$

$$T_{34} = 21,084 \text{ kN}.$$

- pręt 3-5

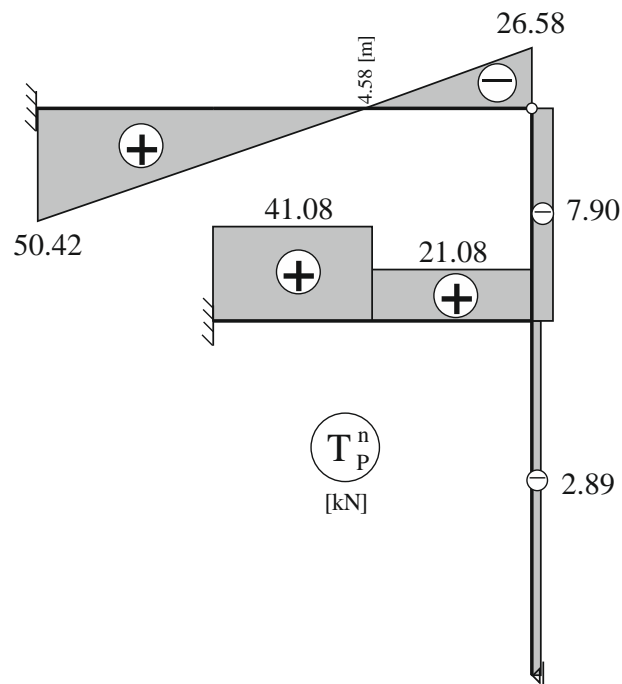


Rys.27. Układ sił dla wyciętego pręta 3-5

$$\begin{aligned} \Sigma M_3 = 0 &\rightarrow T_{53} \cdot 5 + 14,45 = 0, \\ T_{53} &= -2,890 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$\Sigma P_y = 0 \rightarrow T_{35} = T_{53} = -2,890 \text{ kN}.$$

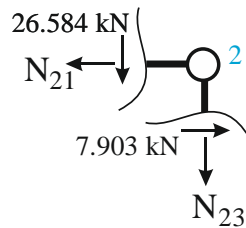
Ostateczny rozkład sił poprzecznych w ramie przedstawia Rys.28.



Rys.28. Siły poprzeczne

11. Wyznaczenie sił normalnych

- z warunków równowagi węzła nr 2 (vide Rys.29)



Rys.29. Siły działające na węzeł 2

$$\Sigma P_x = 0 \rightarrow N_{21} = 7,903 \text{ kN},$$

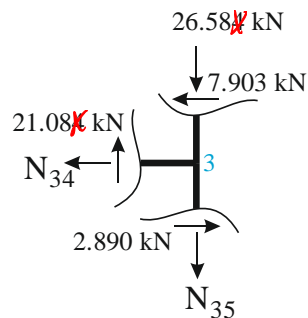
$$\Sigma P_y = 0 \rightarrow N_{23} = -26,584 \text{ kN}.$$

- z warunków równowagi pręta 1-2 (Rys.23) oraz pręta 2-3 (Rys.25) wynika, że:

$$N_{12} = N_{21} = 7,903 \text{ kN},$$

$$N_{32} = N_{23} = -26,584 \text{ kN}.$$

- z warunków równowagi węzła nr 3 (vide Rys.30)



Rys.30. Siły działające na węzeł 3

$$\Sigma P_x = 0 \rightarrow N_{34} = -5,013 \text{ kN},$$

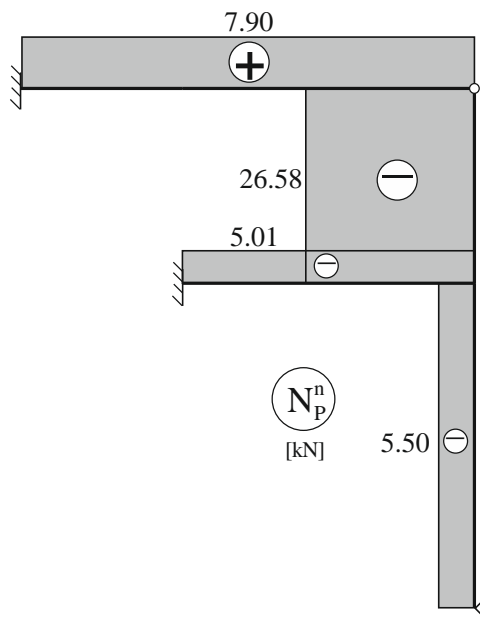
$$\Sigma P_y = 0 \rightarrow N_{35} = -5,5 \text{ kN}.$$

- z warunków równowagi pręta 3-4 (Rys.26) oraz pręta 3-5 (Rys.27) wynika, że:

$$N_{43} = N_{34} = -5,013 \text{ kN},$$

$$N_{53} = N_{35} = -5,5 \text{ kN}.$$

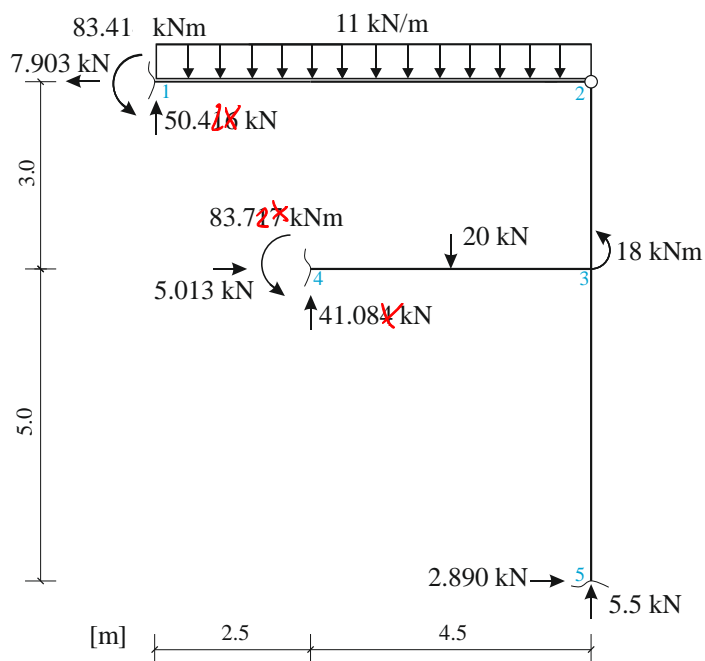
Ostateczny rozkład sił normalnych w ramie:



Rys.31. Siły normalne

12. Kontrola statyczna obliczeń

Sprawdzamy warunki równowagi dla układu odciętego od podłoża (Rys.32).



Rys.32. Układ sił działających na ramę odciętą od podłoża

$$\Sigma P_x = -7,903 + 5,013 + 2,890 = 0 \checkmark$$

$$\Sigma P_y = 5,5 - 20 + 41,084 + 50,416 - 77 = 0 \checkmark$$

$$\Sigma M_I = -83,41 - 83,72 - 18 - 5,5 \cdot 7 - 2,890 \cdot 8 + 20 \cdot 4,75 - 41,08 \cdot 2,5 - 5,013 \cdot 3 + 11 \cdot 7 \cdot 3,5 = 0,000 \checkmark$$

3. SPRAWDZENIE NAPRĘŻEŃ W PRZEKROJACH

a) grupa prętów 1-2, 3-4

$$\text{moment maksymalny } M_{1,max} = 83,71 \text{ kN}\cdot\text{m} = 8371 \text{ kN}\cdot\text{cm}$$
$$w_1 = 425,7 \text{ cm}^3$$

Warunek naprężeń:

$$\frac{M_{1,max}}{w_1} = \frac{8371}{425,7} = 19,66 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 196,6 \text{ MPa} < \sigma_{dop} = 215 \text{ MPa}$$

Warunek nośności został spełniony.

Wyteżenie przekroju wynosi:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{dop}} \cdot 100 \% = \frac{196,6}{215} \cdot 100 \% = 91,47 \%$$

b) grupa prętów 2-3, 3-5

$$\text{moment maksymalny } M_{2,max} = 23,70 \text{ kN}\cdot\text{m} = 2370 \text{ kN}\cdot\text{cm}$$
$$w_2 = 735,5 \text{ cm}^3$$

Warunek naprężeń:

$$\frac{M_{2,max}}{w_2} = \frac{2370}{735,5} = 3,223 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 32,23 \text{ MPa} < \sigma_{dop} = 215 \text{ MPa}$$

Warunek nośności został spełniony.

Wyteżenie przekroju wynosi:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{dop}} \cdot 100 \% = \frac{32,23}{215} \cdot 100 \% = 14,99 \%$$

c) wnioski

Zarówno przekroje przyjęte na pręty grupy I, jak i grupy II są wystarczające.

O ile w przypadku przekrojów grupy I wyteżenie wynosi 91,47 % i ich zastosowanie jest ekonomicznie uzasadnione, o tyle w przypadku przekrojów grupy II wyteżenie wynosi 14,99 %. Mamy tu więc do czynienia ze znacznym przewymiarowaniem przekrojów grupy II, wobec czego pod presją optymalizacji ekonomicznej należy rozważyć ich zastąpienie przekrojami mniejszymi (tańszymi).

Oczywiście zmiana przekrojów grupy II będzie miała wpływ na relację $n = I_1 / I_2$, a co za tym idzie zmianę wykresów sił wewnętrznych. Będzie się to wiązało z koniecznością powtórzenia obliczeń oraz ponownego sprawdzenia warunków nośności dla obu grup prętów dla nowego wykresu $M_p^{(n)}$.