

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH
ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI

ĆWICZENIE NR 1

MECHANIKA BUDOWLI

METODA PRZEMIESZCZEŃ

Prowadzący: mgr inż. Anita Kaczor

Nazwisko i imię studenta: Łukasz Szymański
Tomasz Szumigala

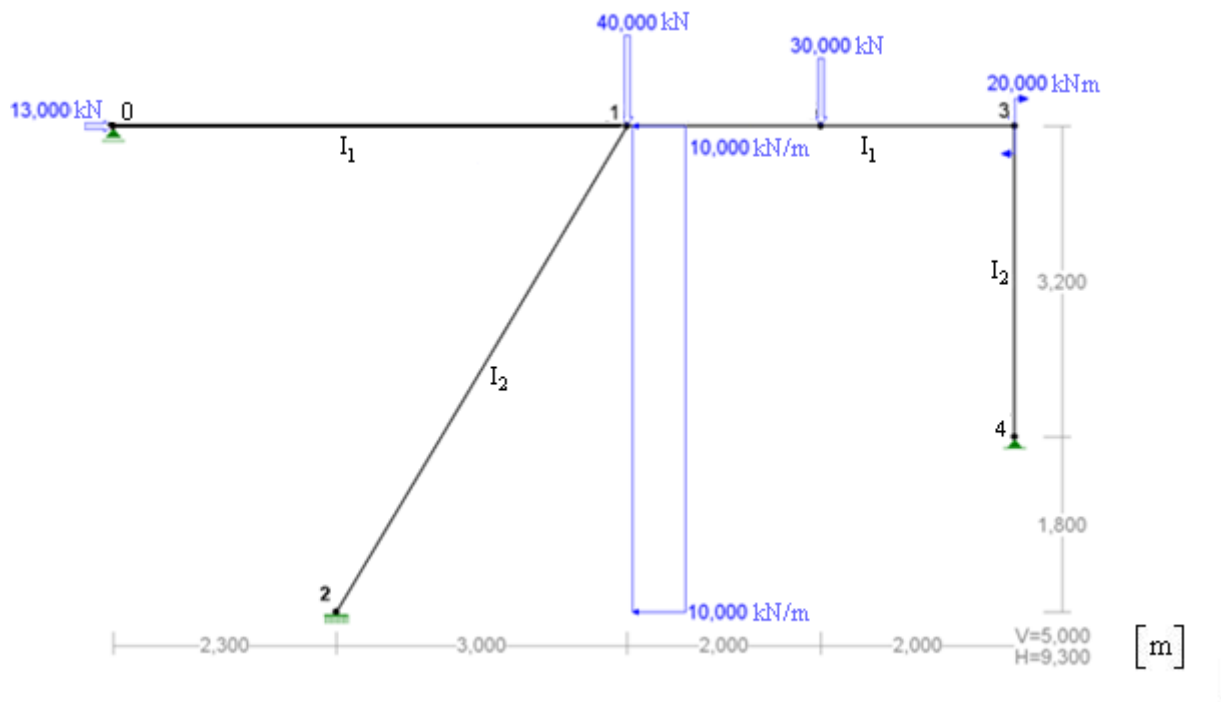
Rok akademicki: 2013/2014

Semestr: III

Grupa: B7

I. Przyjęcie przekroji I_1 i I_2 dla danego układu z profili dwuteowych.

Schemat ramy płaskiej wraz z zadaniem obciążeniem:



rys.1.1. Schemat ramy

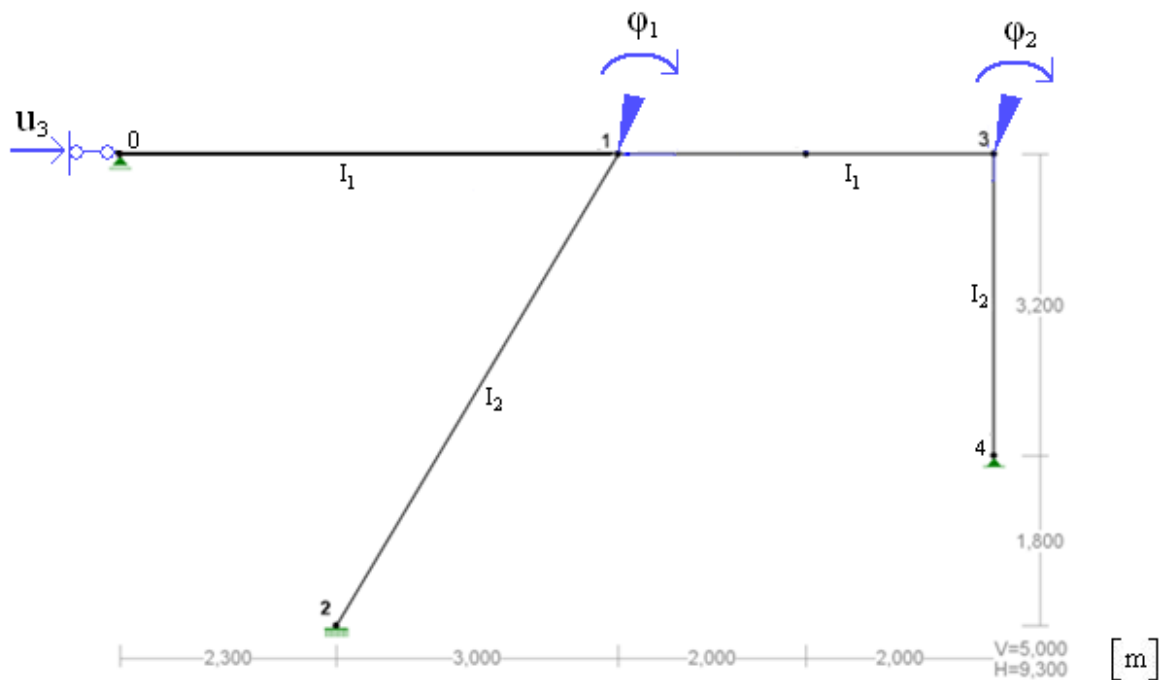
Dla układu zostały przyjęte przekroje I_1 i I_2 :

I_1 - profil dwuteowy: IN600 o wartości: $I_1 = 139000\text{cm}^4$

I_2 - profil dwuteowy: IN550 o wartości: $I_2 = 99180\text{cm}^4$

$$n = \frac{I_1}{I_2} = \frac{139000}{99180} = 1,401492 \Rightarrow I_1 = 1,401492I_2$$

II. Obliczenie sił przekrojowych metodą przemieszczeń



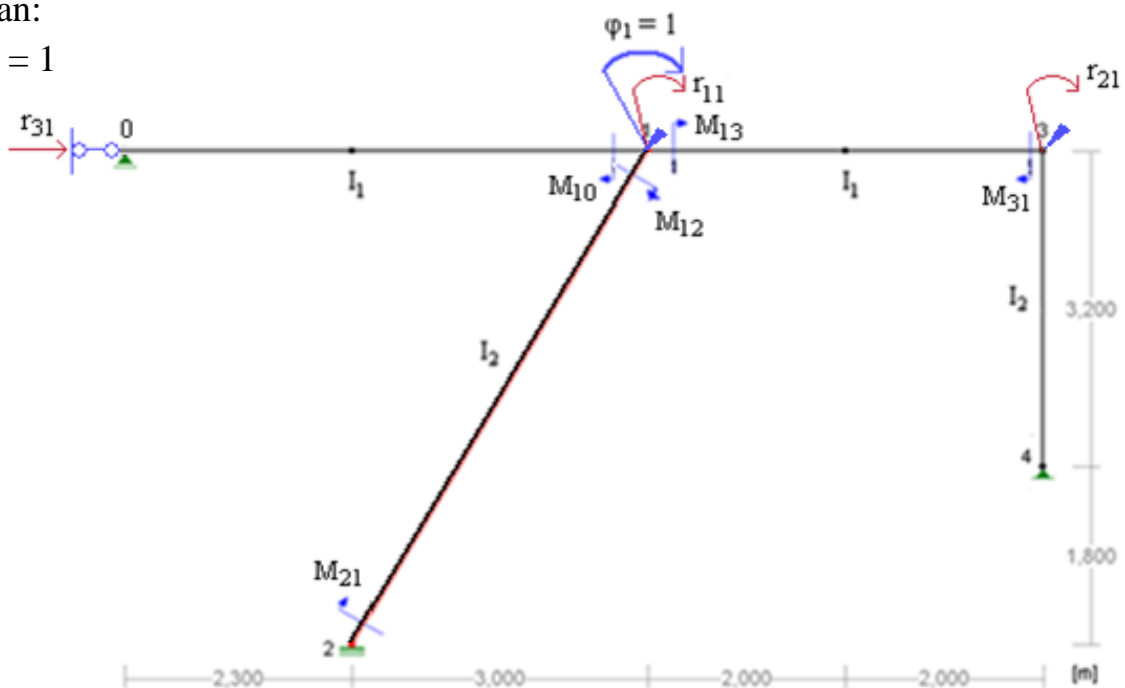
rys. 2.1. Schemat podstawowy

Układ jest trzykrotnie geometrycznie niewyznaczalny.

SGN = 3, niewiadome: $\varphi_1, \varphi_2, u_3$.

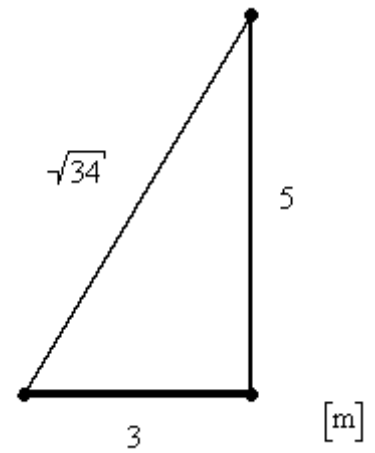
Stan:

$\varphi_1 = 1$



rys. 2.2. Momenty przęsłowe przywęzłowe dla $\varphi_1 = 1$

$$L_{21} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$



$$M_{10}^{(1)} = \frac{3EI_1}{L} (\varphi_1 - \psi_{10}) = \frac{3E * 1,401492I_2}{5,3} * 1 = 0,793297EI_2$$

$$M_{12}^{(1)} = \frac{2EI_2}{L} (2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{12}) = \frac{2EI_2}{\sqrt{34}} * 2 = 0,685994EI_2$$

$$M_{21}^{(1)} = \frac{2EI_2}{L} (2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{21}) = \frac{2EI_2}{\sqrt{34}} * 1 = 0,342997EI_2$$

$$M_{13}^{(1)} = \frac{2EI_1}{L} (2\varphi_1 + \varphi_3 - 3\psi_{13}) = \frac{2E * 1,401492I_2}{4} * 2 = 1,401492EI_2$$

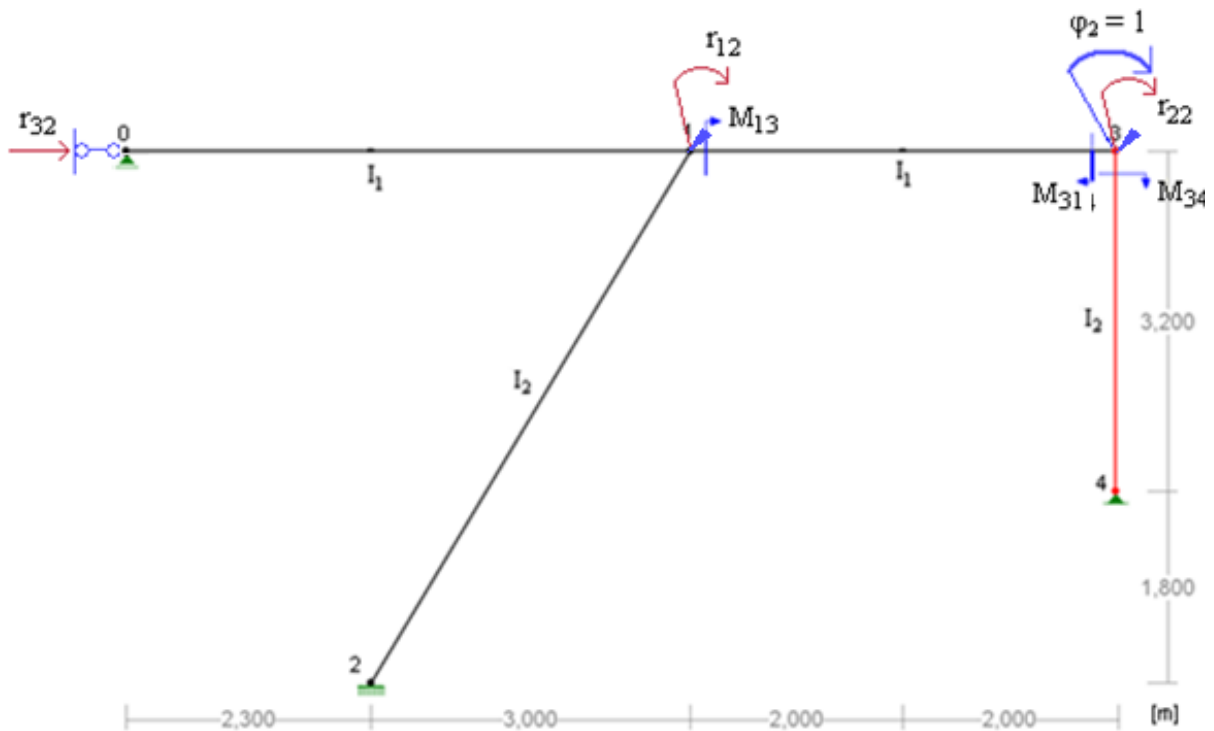
$$M_{31}^{(1)} = \frac{2EI_1}{L} (2\varphi_3 + \varphi_1 - 3\psi_{13}) = \frac{2E * 1,401492I_2}{4} * 1 = 0,700746EI_2$$

$$r_{11} = M_{10}^{(1)} + M_{12}^{(1)} + M_{13}^{(1)} = 0,793297EI_2 + 0,685994EI_2 + 1,401492EI_2 = 2,880783EI_2$$

$$r_{21} = M_{31}^{(1)} = 0,700746EI_2$$

Stan:

$$\varphi_2 = 1$$



rys. 2.3. Momenty przeszłowe przywęzłowe dla $\varphi_2 = 1$

$$M_{13}^{(2)} = \frac{2EI_1}{L}(2\varphi_1 + \varphi_3 - 3\psi_{13}) = \frac{2E * 1,401492I_2}{4} * 1 = 0,700746EI_2$$

$$M_{31}^{(2)} = \frac{2EI_1}{L}(2\varphi_3 + \varphi_1 - 3\psi_{13}) = \frac{2E * 1,401492I_2}{4} * 1 = 1,401492EI_2$$

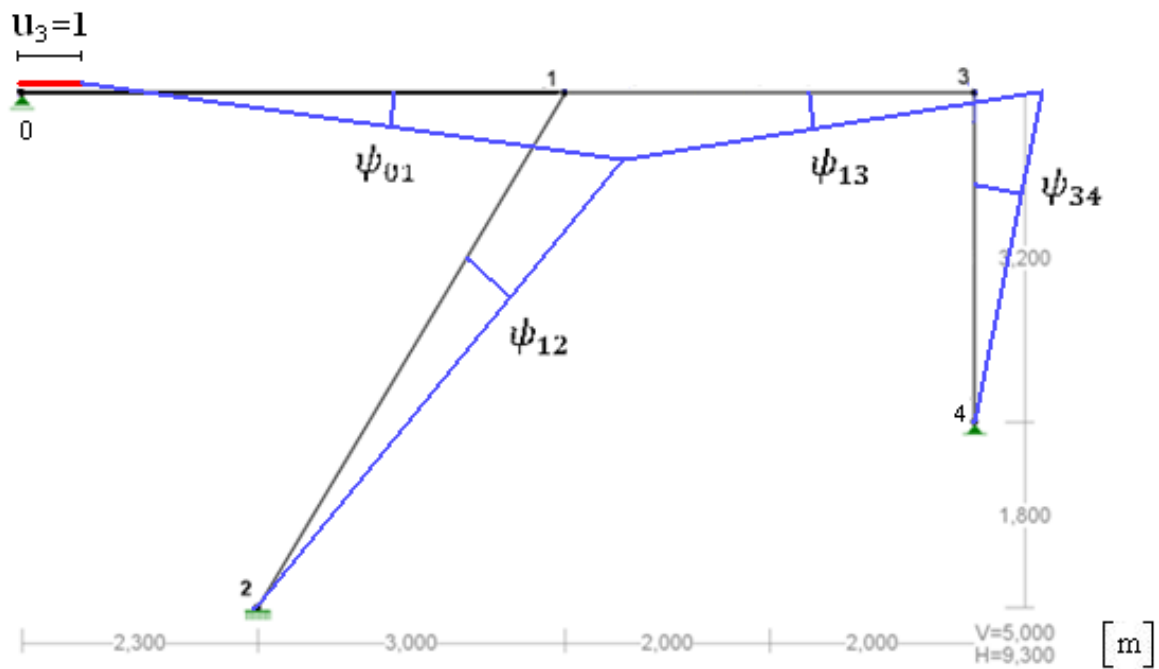
$$M_{34}^{(2)} = \frac{3EI_2}{L}(\varphi_3 - \psi_{34}) = \frac{3EI_2}{3,2} * 1 = 0,9375EI_2$$

$$r_{12} = M_{13}^{(2)} = 0,700746EI_2$$

$$r_{22} = M_{31}^{(2)} + M_{34}^{(2)} = 1,401492EI_2 + 0,9375EI_2 = 2,338992EI_2$$

Stan:

$$u_3=1$$



rys. 2.4. Łańcuch kinematyczny

210 →

$$0 + 5\psi_{12} + 0 = 1$$

$$\psi_{12} = 0,2$$

210 ↑

$$0 + 3\psi_{12} - 5,3\psi_{01} = 0$$

$$\psi_{01} = 0,1132075$$

234 ↑

$$0 + 3\psi_{12} + 4\psi_{13} - 0 = 0$$

$$\psi_{13} = -0,15$$

234 →

$$0 + 5\psi_{12} - 0 - 3,2\psi_{34} = 0$$

$$\psi_{34} = 0,3125$$

Równanie pracy wirtualnej przy wirtualnym stanie przemieszczeń $u_3 = \bar{1}$

$$L_z = L_w$$

$$r_{3i} * \bar{1} + \Sigma(M_{ik}^{(i)} * \bar{\psi}_{ik}) = 0$$

$$r_{31}\bar{1} + 0,793297EI_2 * \bar{\psi}_1 + (0,685994 + 0,342997)EI_2 * \bar{\psi}_2 + (1,401492 + 0,700746)EI_2 * \bar{\psi}_3 = 0$$

$$r_{31} = 0,0197303EI_2$$

$$r_{32}\bar{1} + (1,401492 + 0,700746)EI_2 * \bar{\psi}_3 + 0,9375 * \bar{\psi}_4 = 0$$

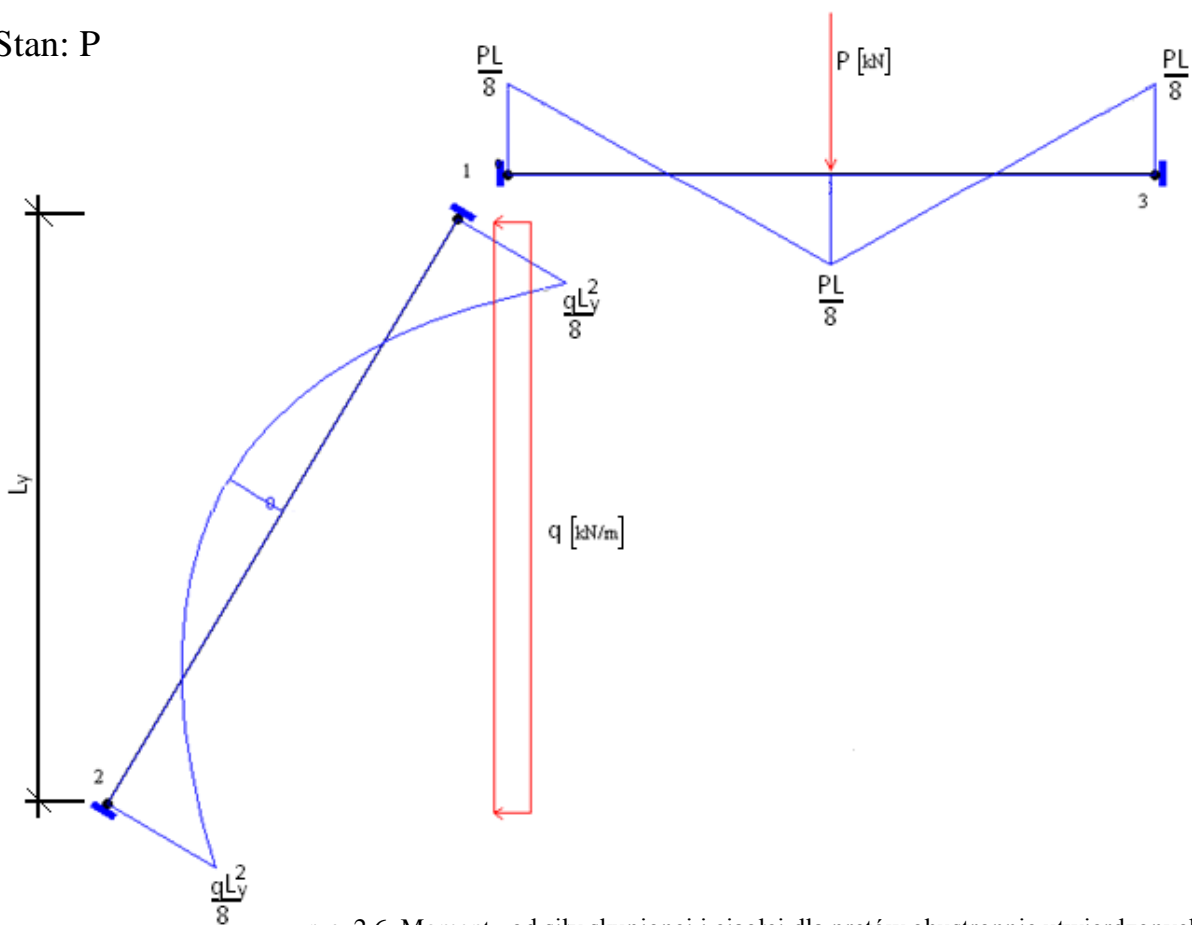
$$r_{32} = 0,0223670EI_2$$

$$r_{33}\bar{1} - 0,0898072EI_2 * \bar{\psi}_1 - 2 * 0,2057983EI_2 * \bar{\psi}_2 + 2 * 0,3153357EI_2 * \bar{\psi}_3 - 0,2929688EI_2 * \bar{\psi}_4 = 0$$

$$r_{33} = 0,278640EI_2$$

$$[K] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,880783 & 0,700746 & 0,0197303 \\ 0,700746 & 2,338992 & 0,0223670 \\ 0,0197303 & 0,0223670 & 0,278640 \end{bmatrix} EI_2$$

Stan: P



rys. 2.6. Momenty od siły skupionej i ciągłej dla prętów obustronnie utwierdzonych

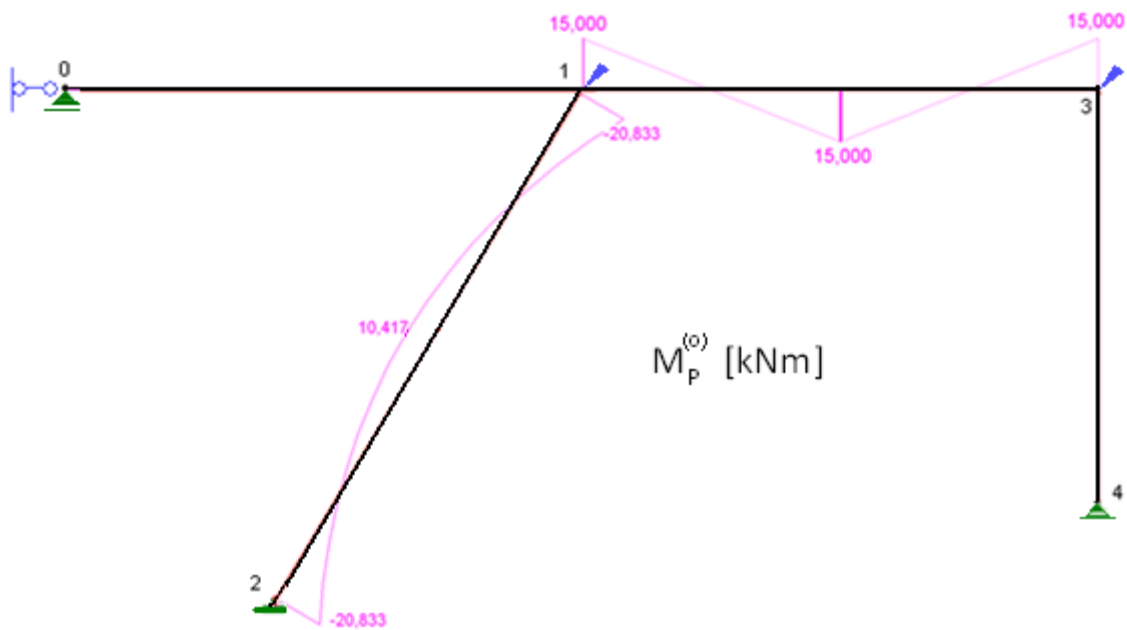
Dla belki 13 i obciążenia pionowego skupionego = 30kN

$$|M_{13}^{(P)}| = |M_{31}^{(P)}| = \frac{PL}{8} = \frac{30 * 4}{8} = 15kNm$$

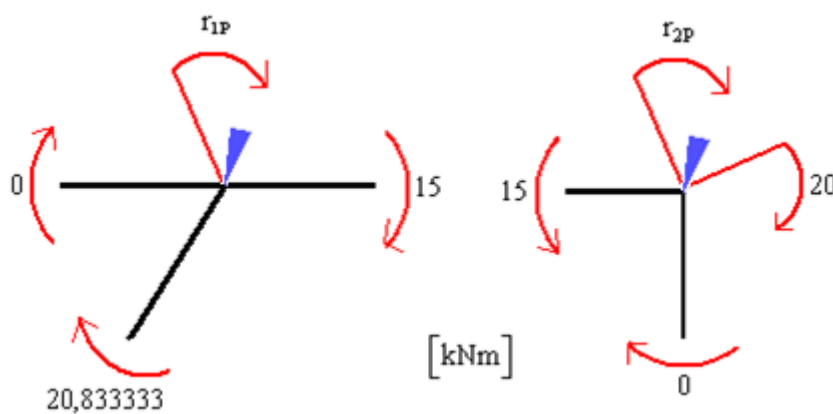
$$|M_C| = \frac{PL}{8} = \frac{30 * 4}{8} = 15kNm$$

Dla belki 12 i obciążenia ciągłego = 10kN/m

$$|M_{12}^{(q)}| = |M_{21}^{(q)}| = \frac{qL^2}{12} = \frac{10 * 5^2}{12} = 20,833333kNm$$



rys. 2.7. Momenty $M_p^{(o)}$

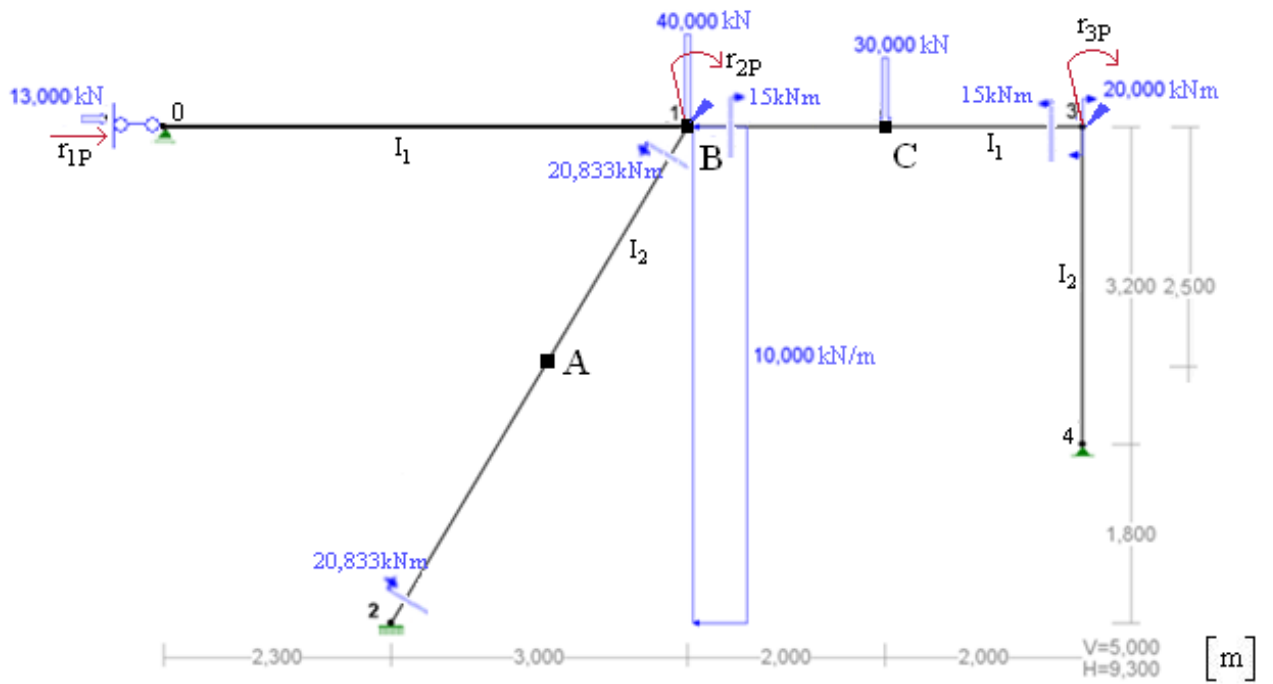


rys. 2.9. Momenty w węzłach: 1 oraz 3 dla stanu $M_p^{(o)}$

$$r_{1P} = -15 - 20,833333 = -35,833333kNm$$

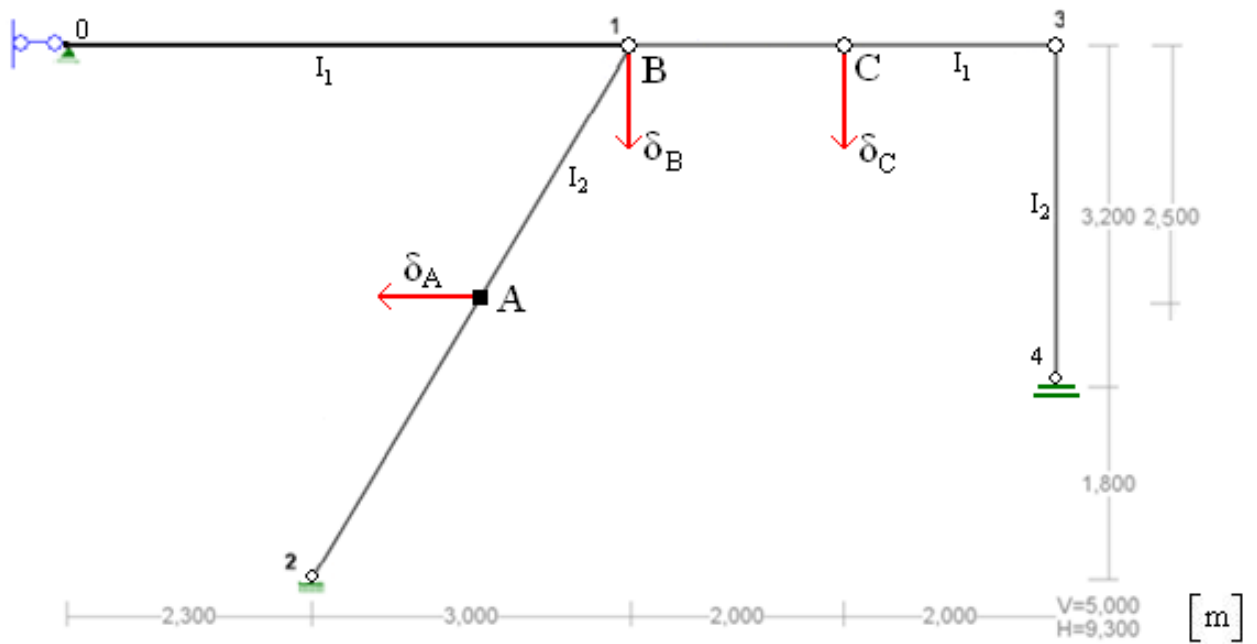
$$r_{2P} = 15 - 20 = -5kNm$$

Wyznaczenie r_{3P} równania pracy wirtualnej (RPW).



rys. 2.8.

Zakładamy zwroty przemieszczeń zgodne ze zwrotami sił skupionych.



Prace siły na przemieszczeniu o zwrocie zgodnym z siłą ma znak „+”, stąd równanie pracy wirtualnej:

$$r_{3P} * \bar{1} + \Sigma M_{ik}^{(P)} * \bar{\psi}_{ik} + \Sigma P_j * \bar{\delta}_j = 0$$

$$r_{3P} \bar{1} + (20,833333 - 28,833333) * \bar{\psi}_{12} + (15 - 15) * \bar{\psi}_{13} + 13 * \bar{1} - 5 * 10 * \bar{\delta}_A + 40 * \bar{\delta}_B + 30 * \bar{\delta}_C = 0$$

2A →

$$0 + 2,5 * \bar{\psi}_{12} = -\bar{\delta}_A \Rightarrow \bar{\delta}_A = -0,5$$

0B ↓

$$0 + 5,3 * \bar{\psi}_{12} = \bar{\delta}_B \Rightarrow \bar{\delta}_B = 0,6$$

23C ↓

$$0 + 3 * \bar{\psi}_{12} + 2 * \bar{\psi}_{13} = \bar{\delta}_C \Rightarrow \bar{\delta}_C = 0,3$$

$$r_{3P} = -21kN$$

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} r_{1P} \\ r_{2P} \\ r_{3P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35,833333kNm \\ -5kNm \\ -21kN \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2,880783 & 0,700746 & 0,0197303 \\ 0,700746 & 2,338992 & 0,022367 \\ 0,0197303 & 0,022367 & 0,278640 \end{bmatrix} EI_2 \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,833333 \\ 5 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12,491368 \\ -2,318678 \\ 74,667684 \end{Bmatrix} * \frac{1}{EI_2}$$

$$M_p^{(n)} = M_p^{(0)} + M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + M_3u_3$$

Obliczenia wykonane przy pomocy programu Excel (załącznik 1)

$$M_{10}^n = M_{10}^1 * \varphi_1 + M_{10}^2 * \varphi_2 + M_{10}^3 * u_3 + M_{10}^P =$$

$$= 0,793297EI_2 * \frac{12,491368}{EI_2} - 0,0898072EI_2 * \frac{-2,318678}{EI_2} + 0 = 3,203669kNm$$

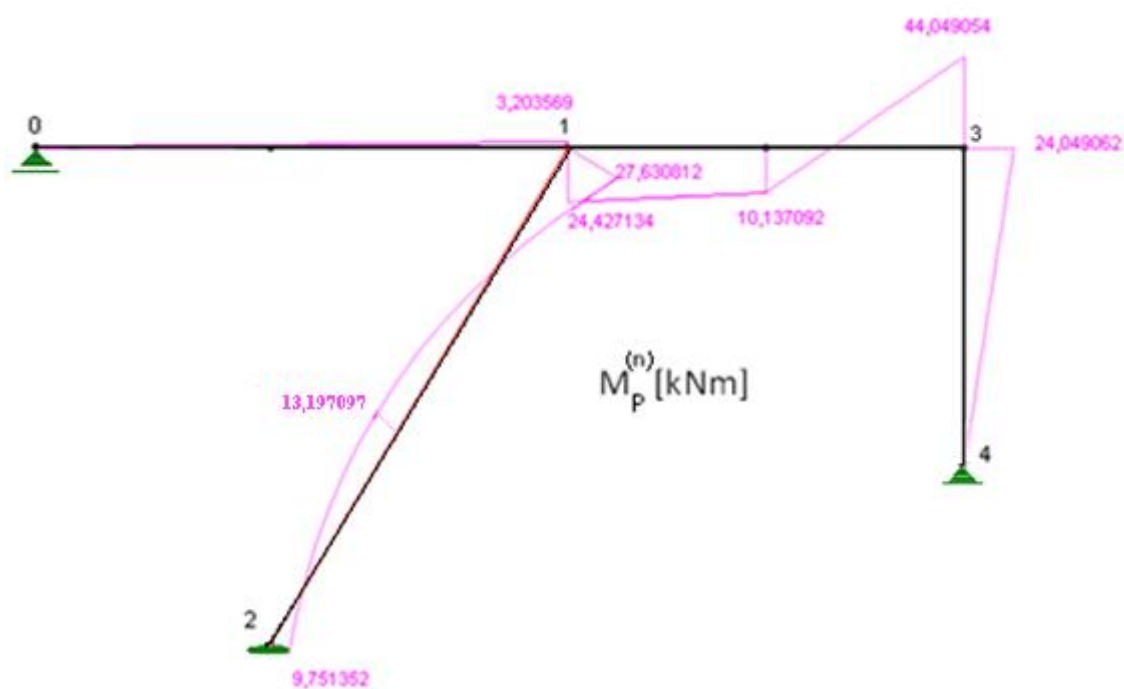
$$M_{12}^n = -27,630812kNm$$

$$M_{21}^n = 9,751352kNm$$

$$M_{13}^n = 24,427134kNm$$

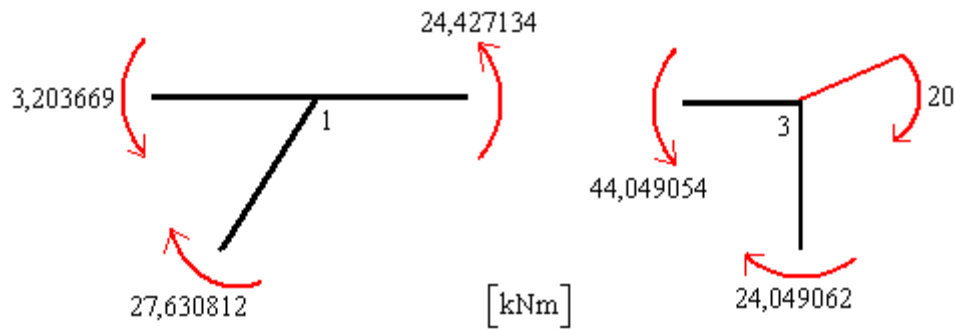
$$M_{31}^n = 44,049054kNm$$

$$M_{34}^n = -24,049062kNm$$



rys. 2.9. Momenty $M_p^{(n)}$

Sprawdzenie równowagi momentów w węzłach:



rys. 2.10. Momenty w węzłach: 1 oraz 3 dla stanu $M_p^{(n)}$

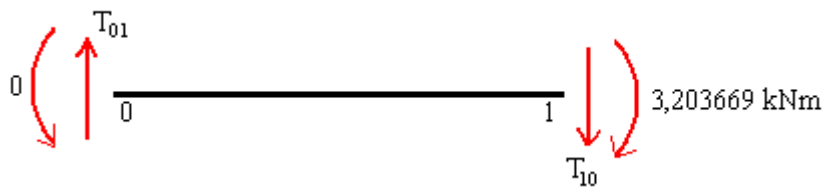
Równowaga momentów w węźle nr 1

$$3,203669 + 24,427134 - 27,630812 = 0,000009 \text{ kNm} \approx 0$$

Równowaga momentów w węźle nr 3

$$44,049054 - 24,049062 - 20 = -0,000008 \text{ kNm} \approx 0$$

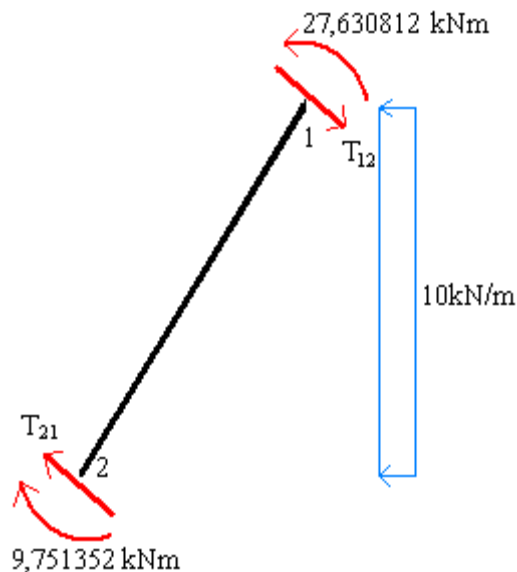
Siły tnące:



rys. 2.11.

$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow T_{10} * L_{10} + M_{10} = 0$$

$$T_{01} = T_{10} = \frac{-M_{10}}{L_{10}} = \frac{-3,203669}{5,3} = -0,604466 \text{ kN}$$



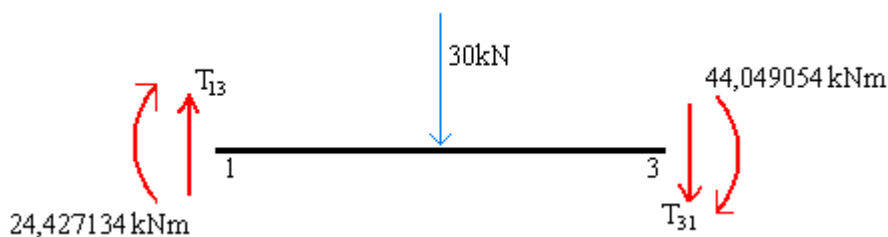
rys. 2.12.

$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow T_{21} * L_{21} + M_{21} - M_{12} + 10 * 5 * 2,5 = 0$$

$$T_{21} = \frac{M_{12} - M_{21} - 125}{L_{21}} = \frac{27,630812 - 9,751352 - 125}{\sqrt{34}} = -18,371021 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0 \Rightarrow T_{12} * L_{21} + M_{21} - M_{12} - 10 * 5 * 2,5 = 0$$

$$T_{12} = \frac{M_{12} - M_{21} + 125}{L_{21}} = \frac{27,630812 - 9,751352 + 125}{\sqrt{34}} = 24,503625 \text{ kN}$$



rys. 2.13.

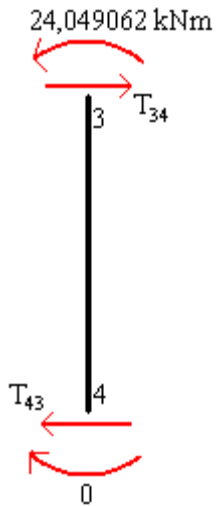
$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow T_{31} * L_{31} + M_{31} + M_{13} + 30 * \frac{L_{31}}{2} = 0$$

$$T_{31} = \frac{-M_{31} - M_{13} - 60}{L_{31}} = \frac{-44,049054 - 24,427134 - 60}{4} = -32,119047 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3 = 0 \Rightarrow T_{13} * L_{31} + M_{31} + M_{13} - 30 * \frac{L_{31}}{2} = 0$$

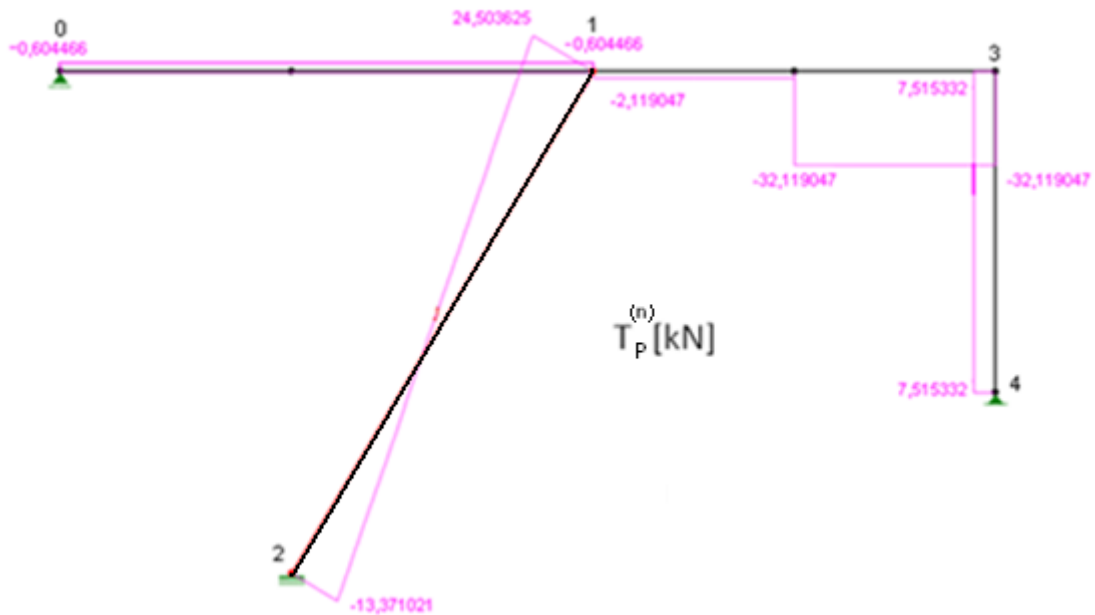
$$T_{13} = \frac{-M_{31} - M_{13} + 60}{L_{31}} = \frac{-44,049054 - 24,427134 + 60}{4} = -2,119047 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3 = 0 \Rightarrow T_{43} * L_{43} - M_{34} = 0$$



$$T_{34} = T_{43} = \frac{M_{34}}{L_{43}} = \frac{24,049062}{3,2} = 7,515332 \text{ kN}$$

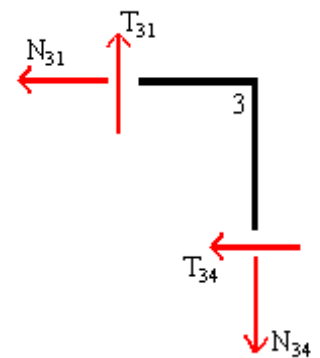
rys. 2.14.



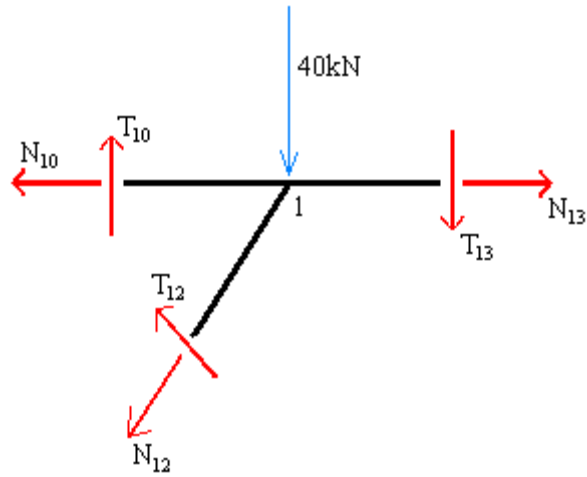
rys. 2.15. Tnące $T_p^{(n)}$

Siły normalne:

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= 0 \\ N_{34} = N_{43} = T_{31} &= -32,119047 \text{ kN} \\ \Sigma X &= 0 \\ N_{31} = N_{13} = -T_{34} &= -7,515332 \text{ kN} \end{aligned}$$



rys. 2.16.



rys. 2.17.

$$\Sigma Y = 0$$

$$0 = T_{10} - 40 - T_{13} + T_{12} * \frac{3}{\sqrt{34}} - N_{12} * \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$0 = -0,604466 - 40 + 2,119047 + 24,503625 * \frac{3}{\sqrt{34}} - N_{12} * \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$N_{12} = -30,179150 \text{ kN}$$

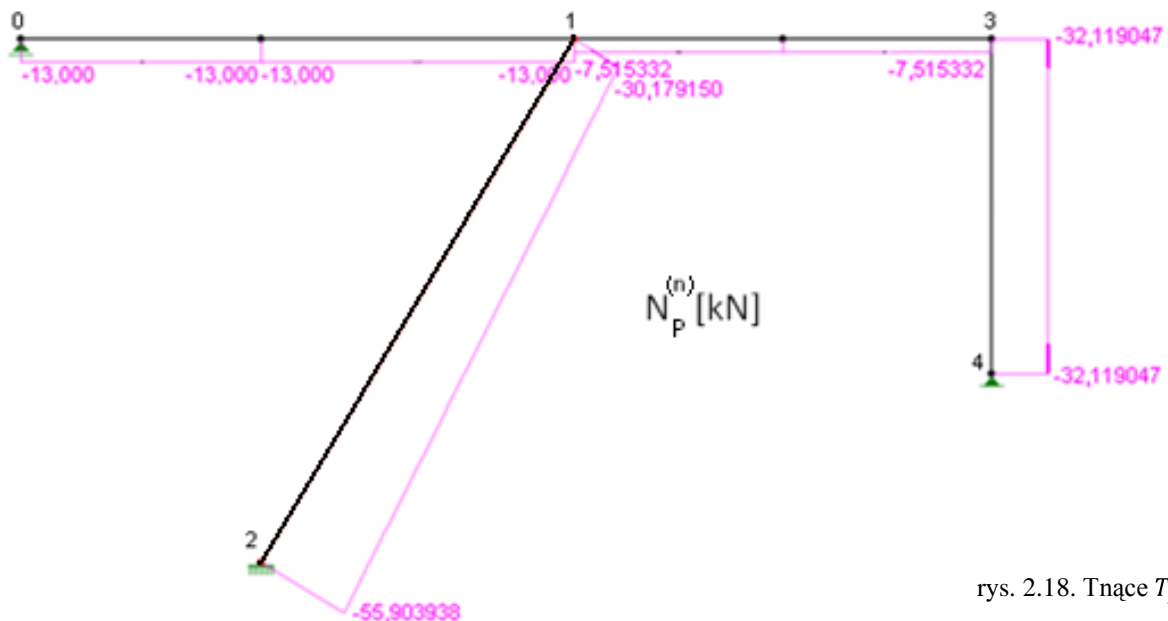
$$\Sigma X = 0$$

$$0 = -N_{10} + N_{13} - T_{12} * \frac{5}{\sqrt{34}} - N_{12} * \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$N_{10} = -7,515332 - 24,503625 * \frac{5}{\sqrt{34}} + 30,179150 * \frac{3}{\sqrt{34}}$$

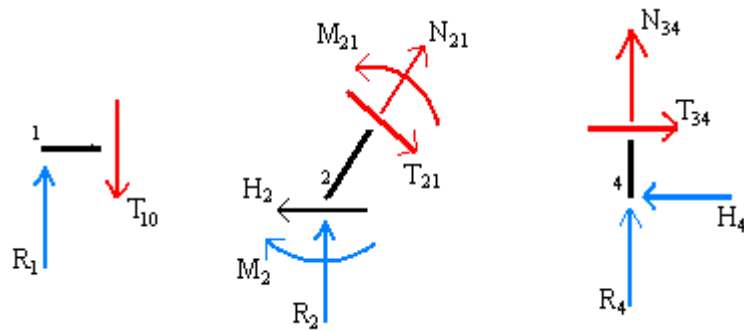
$$N_{10} = -12,999997 = -13 \text{ kN}$$

$$N_{21} = N_{12} - 10 * 5 * \frac{3}{\sqrt{34}} = -30,179150 - 25,724788 = -55,903938 \text{ kN}$$



rys. 2.18. Tnące $T_P^{(n)}$

Reakcje:



rys. 2.19.

$$\Sigma Y_1 = 0 \rightarrow$$

$$R_1 = T_{01} = -0,604466 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_2 = 0 \rightarrow$$

$$R_2 = T_{21} * \frac{3}{\sqrt{34}} - N_{21} * \frac{5}{\sqrt{34}} = -18,371021 * \frac{3}{\sqrt{34}} + 55,903938 * \frac{5}{\sqrt{34}} \text{ kN}$$

$$= 38,485419 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_2 = 0 \rightarrow$$

$$H_2 = T_{21} * \frac{5}{\sqrt{34}} + N_{21} * \frac{3}{\sqrt{34}} = -18,371021 * \frac{5}{\sqrt{34}} - 55,903938 * \frac{3}{\sqrt{34}} \text{ kN}$$

$$= -44,515359 \text{ kN}$$

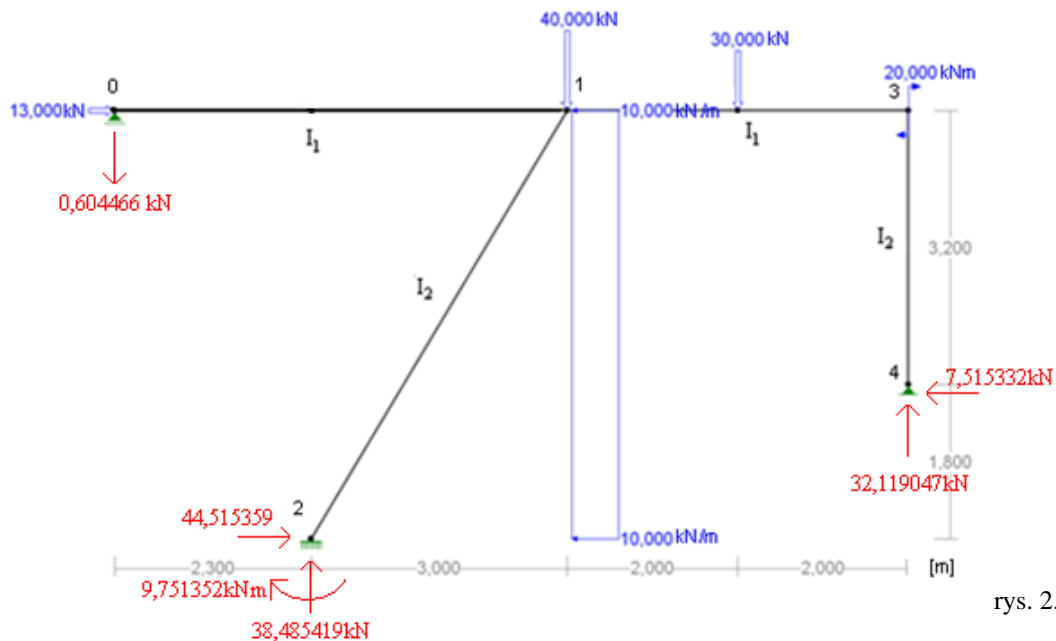
$$M_2 = M_{21} = 9,751352 \text{ kNm}$$

$$\Sigma Y_4 = 0 \rightarrow$$

$$R_4 = -N_{34} = 32,119047 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_4 = 0 \rightarrow$$

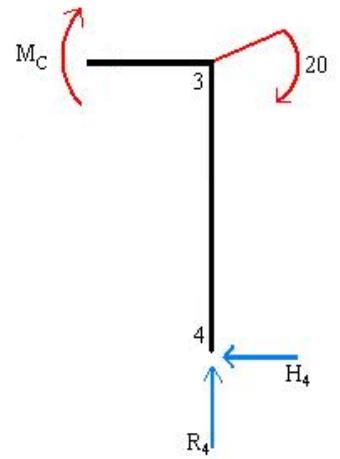
$$H_4 = T_{34} = 7,515332 \text{ kN}$$



rys. 2.20. Reakcje

Moment pod siłą skupioną $P = 30\text{kN}$ w pkt. C

$$M_C = -20 - H_4 * 3,2 + R_4 * 2 = -20 - 7,515332 * 3,2 + 32,119047 * 2 = 20,189032$$



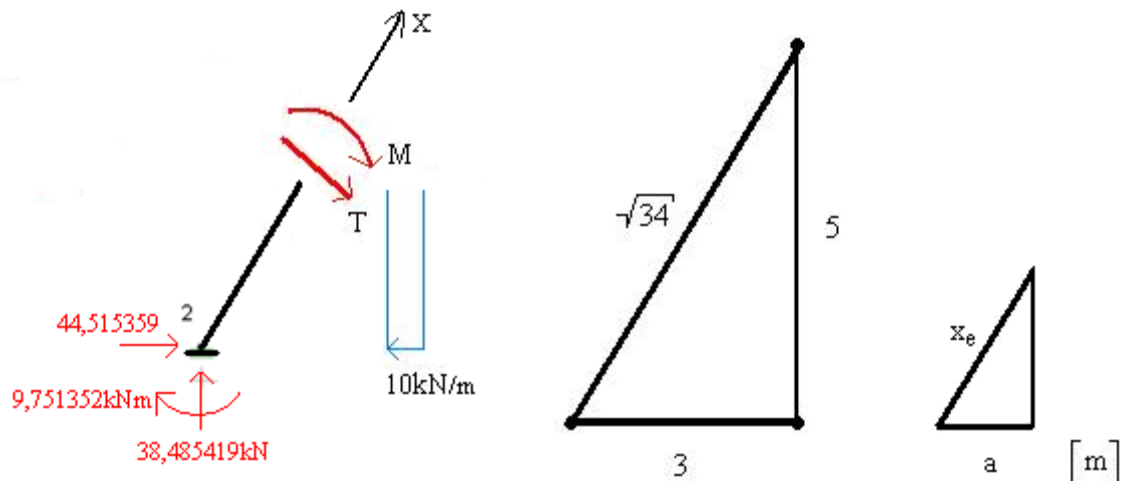
rys. 2.21.

Moment ekstremalny pod obciążeniem ciągłym:

$$T(x)=0$$

$$0 = 38,485416 * \frac{3}{\sqrt{34}} - 44,515359 * \frac{5}{\sqrt{34}} + 10 * x_e * \frac{5}{\sqrt{34}} * \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$x_e = 2,498459\text{m}$$



rys. 2.22. 2.23.

$$a = x_e * \frac{3}{\sqrt{34}} = 1,285447\text{m}$$

$$M_{ext} = -38,485419 * 1,285477 - 9,751352 + 44,515359 * 2,142411 + -10 * 2,142411 * \frac{2,142411}{2} = 13,197097\text{kNm}$$

Sprawdzenia:

1. Statyczne:

$$\Sigma X = 0$$

$$0 = 13 - 10 * 5 + 44,515359 - 7,515332 = 0,000027$$

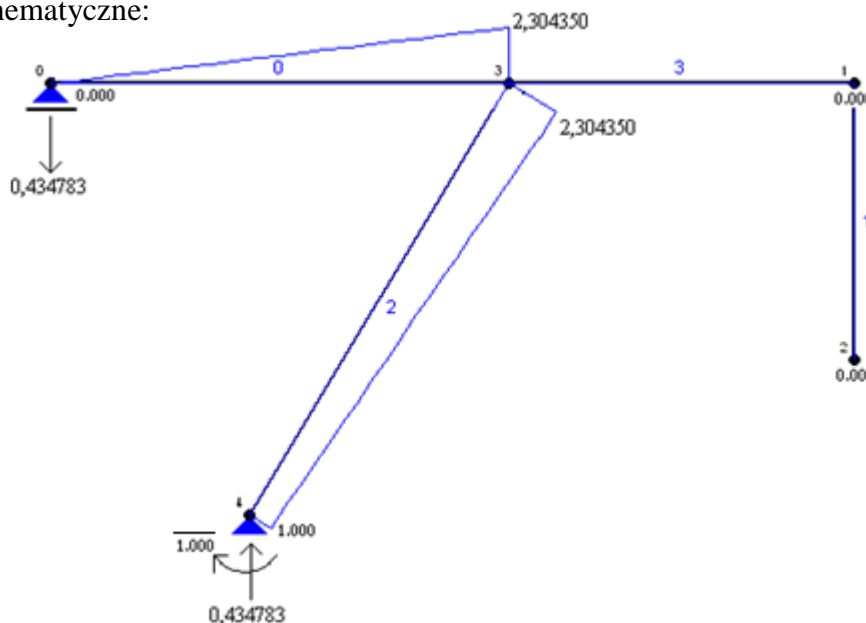
$$\Sigma Y = 0$$

$$0 = -40 - 30 - 0,604466 + 38,485419 + 32,119047 = 0$$

$$\Sigma M_1 = 0$$

$$0 = -0,604466 * 5,3 - 44,515359 * 5 + 38,485419 * 3 + 9,751352 - 32,119047 * 4 + 7,515332 * 3,2 + 30 * 2 + 20 + 10 * 5 * 2,5 = 0,000019$$

2. Kinematyczne:



rys. 2.22. Stan \bar{M}^o

Obrót przekroju w pkt. 2

$$\begin{aligned} \varphi &= \Sigma \int \frac{M_P^{(n)} * \bar{M}^{(o)}}{EI} = \\ &= \frac{1}{1,401492 * EI_2} \left(0,5 * 3,203669 * 5,3 * \frac{2}{3} * 2,30435 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \left[0,5 * 9,751352 * \sqrt{34} * \left(\frac{2}{3} * 1 + \frac{1}{3} * 2,30435 \right) + \right. \\ &+ 0,5 * 27,630812 * \sqrt{34} * \left(\frac{2}{3} * 2,30435 + \frac{1}{3} * 1 \right) + \\ &\left. - \frac{2}{3} * \frac{10 * 5^2}{8} * \sqrt{34} * (0,5 * 1 + 0,5 * 2,30435) \right] = \\ &(9,30594092 + 40,79063706 + 150,6066568 - 200,7032867) * \frac{1}{EI_2} = -\frac{0,000052}{EI_2} \end{aligned}$$

III. Sprawdzenie naprężeń w obu grupach przekrojów I_1 i I_2 , porównanie z wartościami dopuszczalnymi naprężeń (215MPa). Wnioski.

Wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu:

$$W_y = \frac{I_y}{z_d}$$

- dla przekroju: dwuteownik zwykły IPN 600, $I_1=139000\text{cm}^4$

$$W_y = \frac{I_y}{z_d} = \frac{139000}{300} = 4633\text{cm}^3$$

Wartości wskaźnika wytrzymałości dla dwuteowników są podane w tablicach.

Moment ekstremalny występujący w przekroju:

$$M_y^{ext} = |27,6308| = 27,6308\text{kNm} = 2763,08\text{kNcm}$$

- dla przekroju: dwuteownik zwykły IPN 550, $I_2 = 99180\text{cm}^4$

$$W_y = 3606\text{cm}^3$$

Moment ekstremalny występujący w przekroju IPN 550

$$M_y^{ext} = |-44,0491| = 44,0491\text{kNm} = 4404,91\text{kNcm}$$

Warunek wytrzymałości na zginanie:

$$\sigma_x^{ext} = \frac{M_y^{ext}}{W_y} < R$$

Wytrzymałość materiału:

$$R = 215\text{MPa} = 21,5\text{kN/cm}^2$$

- dla $I_1 = 139000\text{cm}^4$

$$\frac{2763,08}{4633} = 0,6 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \ll 21,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

- dla $I_2 = 99180\text{cm}^4$

$$\frac{4404,91}{3606} = 1,2 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \ll 21,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Wnioski: przekroje zostały dobrane nieekonomicznie.

Aby bardziej optymalnie zaprojektować konstrukcję (analizujemy tylko warunek wytrzymałościowy) należy zmniejszyć przekroje I_1 oraz I_2 . Przyjęcie innych przekrojów zmienia współczynnik n , od którego zależą momenty w stanach jednostkowych przemieszczeń ($\varphi_1=1, \varphi_2=1, u_3=1$), a więc w konsekwencji ostateczny rozkład momentów zginających M_p^n

Przykładowo:

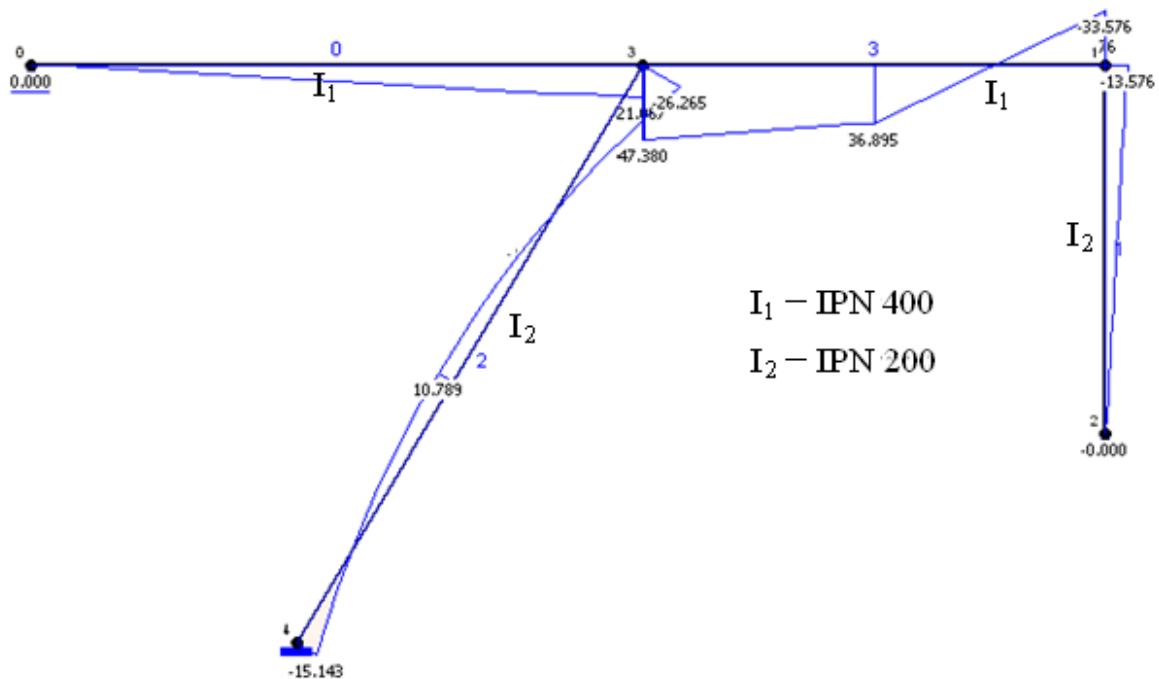
- w II kroku przyjęto:

$$I400 \quad I_1 = 29210 \text{ cm}^4 \quad W_y = 1460 \text{ cm}^3$$

$$I200 \quad I_2 = 2140 \text{ cm}^4 \quad W_y = 214 \text{ cm}^3$$

$$n = \frac{I_1}{I_2} = \frac{29210}{2140} = 13,6495$$

Za pomocą programu Soldis otrzymaliśmy wykresy momentów przekrojowych:



rys. 3.2. Momenty przekrojowe.

Wyniki:

dla I_1

$$M_y^{ext} = 47,380 \text{ kNm} = 4738 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_x^{ext} = \frac{M_y^{ext}}{W_y} = 3,24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 32,4 \text{ MPa}$$

dla I_2

$$M_y^{ext} = 26,265 \text{ kNm} = 2626,5 \text{ kNcm}$$

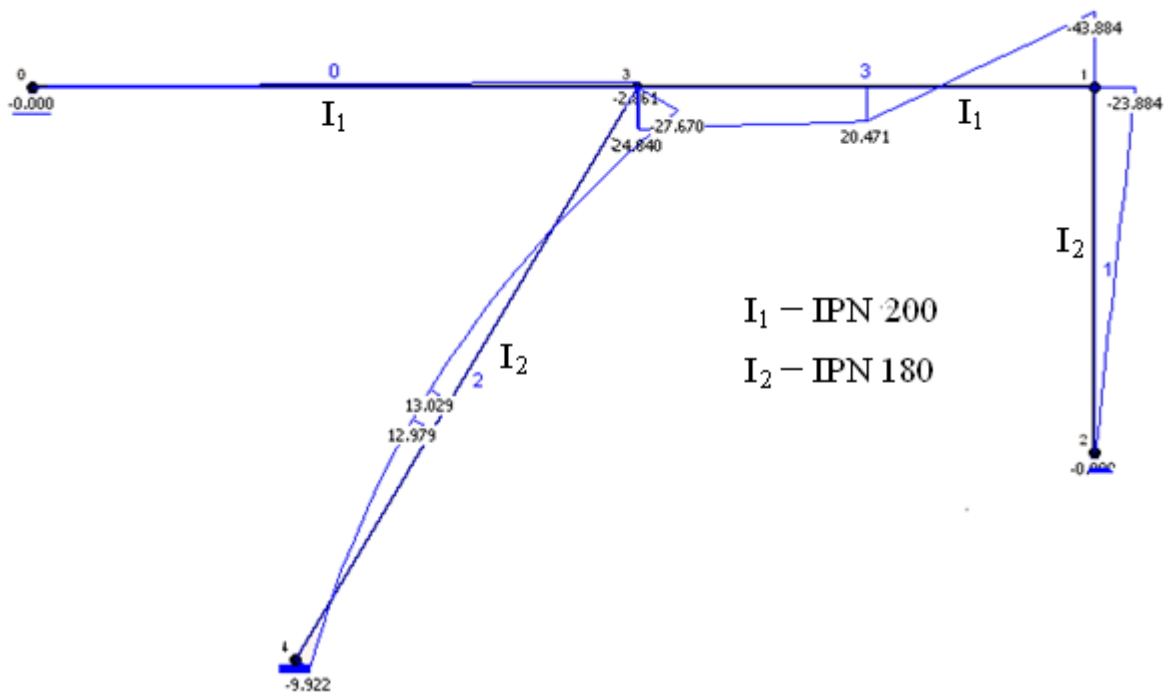
$$\sigma_x^{ext} = \frac{M_y^{ext}}{W_y} = 12,28 \frac{kN}{cm^2} = 122,8MPa$$

- w III kroku przyjęto:

$$\begin{array}{ll} \text{I200} & I_1 = 2140cm^4 \quad W_y = 214 cm^3 \\ \text{I180} & I_2 = 1450cm^4 \quad W_y = 161 cm^3 \end{array}$$

$$n = \frac{I_1}{I_2} = \frac{2140}{1450} = 1,4759$$

Za pomocą programu Soldis otrzymaliśmy wykresy momentów przekrojowych:



rys. 3.3. Momenty przekrojowe.

Wyniki:
dla I₁

$$M_y^{ext} = 43,884kNm = 4388,4kNcm$$

$$\sigma_x^{ext} = \frac{M_y^{ext}}{W_y} = 20,5 \frac{kN}{cm^2} = 205MPa$$

dla I₂

$$M_y^{ext} = 27,670kNm = 2767kNcm$$

$$\sigma_x^{ext} = \frac{M_y^{ext}}{W_y} = 17,19 \frac{kN}{cm^2} = 171,9 MPa$$

Załącznik 1

	M(1)/EI2	M(2)/EI2	M(3)/EI2	M(Po)	M(Pn)
0->1	0	0	0	0	0
1->0	0,793297	0	-0,0898072	0	3,20366913
1->2	0,685994	0	-0,2057983	-20,833333	-27,63081193
2->1	0,342997	0	-0,2057983	20,833333	9,751352318
1->3	1,401492	0,700746	0,3153357	-15	24,42713439
3->1	0,700746	1,401492	0,3153357	15	44,04905389
3->4	0	0,9375	-0,2929688	0	-24,04906241
4->3	0	0	0	0	0

wartości - łańcuch kinematyczny

psi1	psi2	psi3	psi4
0,1132075	0,2	-0,15	0,3125

wartości - szukane fi1, fi2, u3

fi1/EI2	fi2/EI2	u3/EI2
12,491368	-2,318678	74,667684
12,491368	-2,318678	74,667684
12,491368	-2,318678	74,667684
12,491368	-2,318678	74,667684
12,491368	-2,318678	74,667684
12,491368	-2,318678	74,667684