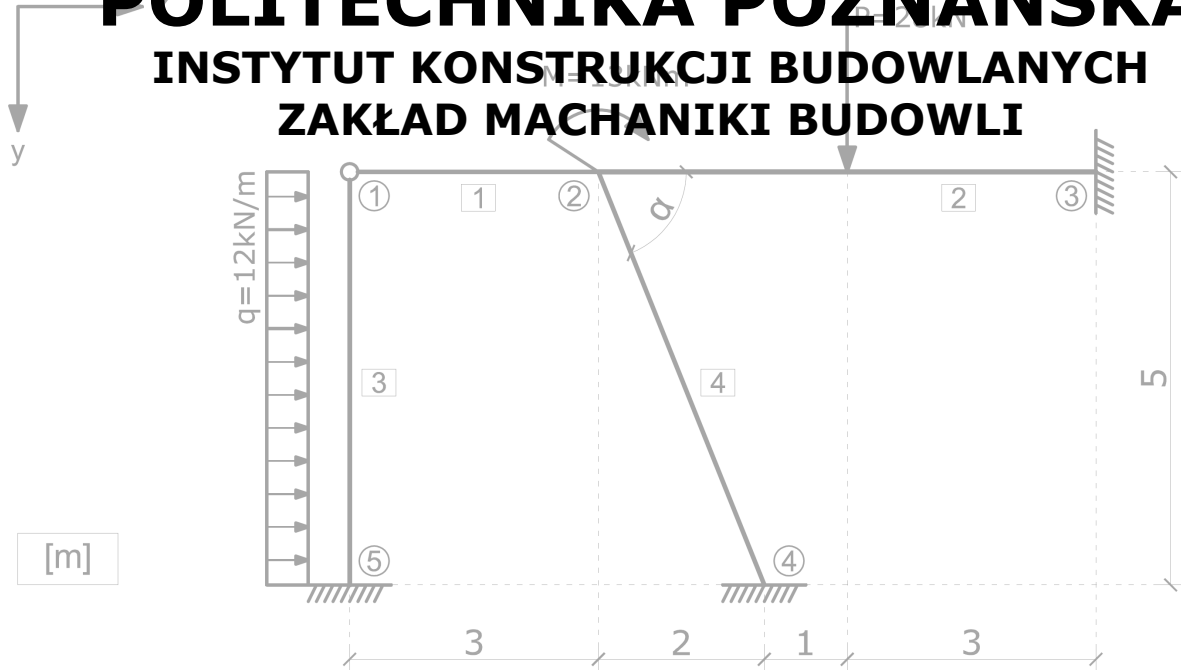




POLITECHNIKA POZNAŃSKA

INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH

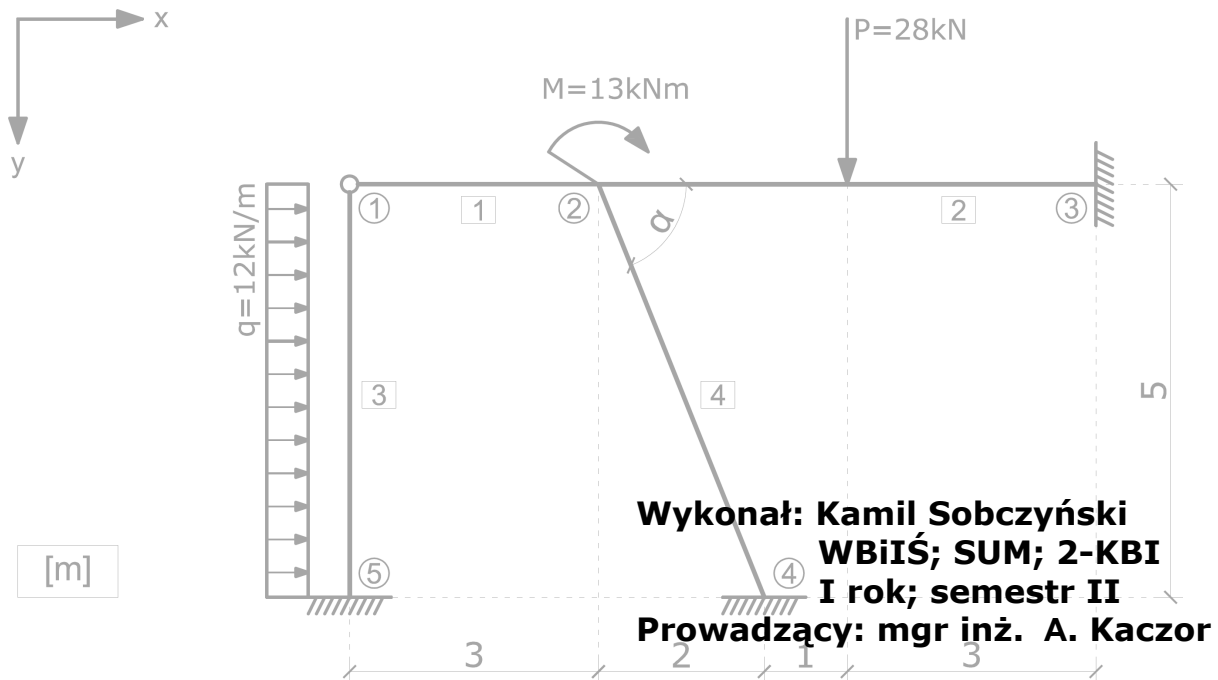
ZAKŁAD MACHANIKI BUDOWLI



ĆWICZENIE PROJEKTOWE

Z PRZEDMIOTU

MECHANIKA KONSTRUKCJI



ĆWICZENIE PROJEKTOWE Z PRZEDMIOTU **MACHANIKA KONSTRUKCJI**

Zawartość opracowania.

- I. Strona tytułowa**
- II. Karta projektowa/konsultacyjna**
- III. Opis techniczny**
 - 1. Podstawa opracowania
 - 2. Podstawowe założenia obliczeń
- IV. Obliczenia**
 - 1. Metoda przemieszczeń - wersja komputerowa

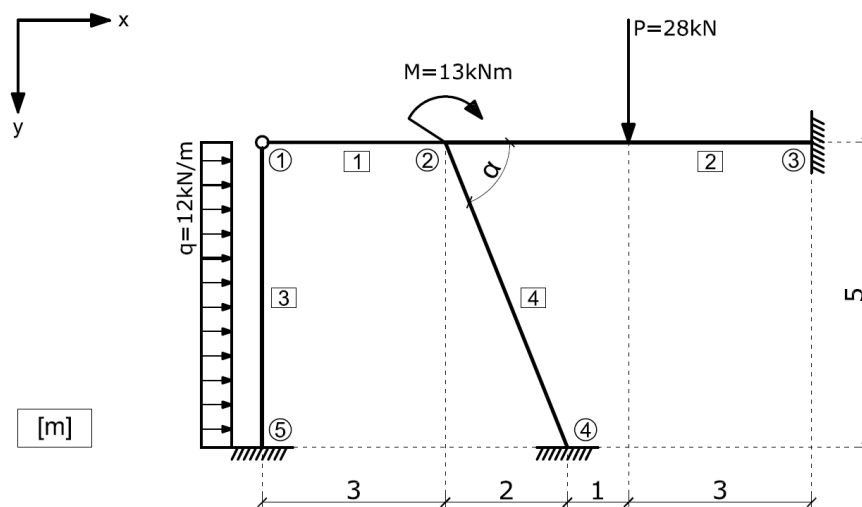
III. Opis techniczny

1. Podstawa opracowania

- Ćwiczenia projektowe z przedmiotu „Mechanika konstrukcji”,
- J. Rakowski, „Mechanika budowli” WPP, Poznań 2007,
- <http://www.ikb.poznan.pl/michal.guminiak/dydaktyka.htm>,
- <http://www.ikb.poznan.pl/anita.kaczor/materialy.htm>.

2. Podstawowe założenia obliczeń

- Projekt nr 1 – „Metoda przemieszczeń – wersja komputerowa”



Rys. 1.1.

Dane:

- Obciążenie skupione $P = 28\text{kN}$,
- Obciążenie momentem $M = 13\text{kNm}$,
- Obciążenie równomiernie rozłożone $q = 12\text{kN/m}$,
- Sztywność ramy $EJ \neq \text{const.}$,
- Przekrój pręta rygli IPE300, $h = 0.30\text{m}$,
- Przekrój pręta słupów IPE240, $h = 0.24\text{m}$.

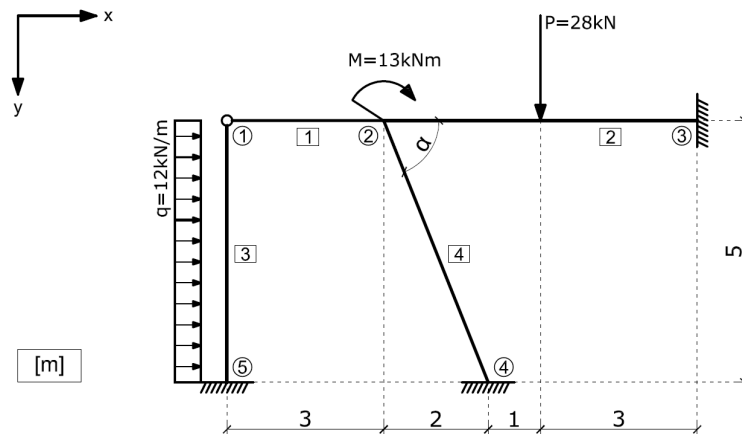
Szukane:

- Wykresy sił wewnętrznych N, T, M komputerową metodą przemieszczeń, poprawność obliczeń potwierdzić kontrolą kinematyczną.

IV. Obliczenia

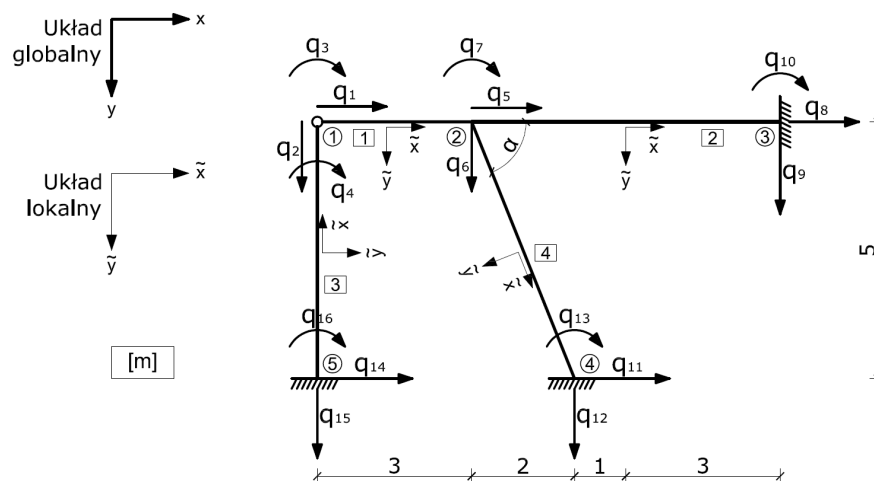
1. Metoda przemieszczeń – wersja komputerowa

Schemat konstrukcji:



Rys. 1.1.

Przemieszczenia w układzie globalnym i lokalnym:



Rys. 1.2.

Przyjęto do obliczeń, że ramę tworzą belki stalowe:

- rygiel (pręt nr1, nr2): IPE300, $J_{1/2} = 9800 \text{ cm}^4$, $A = 69.0 \text{ cm}^2$, $h = 0.30 \text{ m}$,
- słup (pręt nr3, nr4): IPE240, $J_{3/4} = 4250 \text{ cm}^4$, $A = 46.1 \text{ cm}^2$, $h = 0.24 \text{ m}$,
- współczynnik sprężystości podłużnej: $E = 205 \text{ GPa}$,
- sztywność prętów: $EJ_{1/2} = 20090 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$, $EJ_{3/4} = 8712.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$,

$$EA_{1/2} = 1414500 \text{ kN}, \quad EA_{3/4} = 945050 \text{ kN}.$$

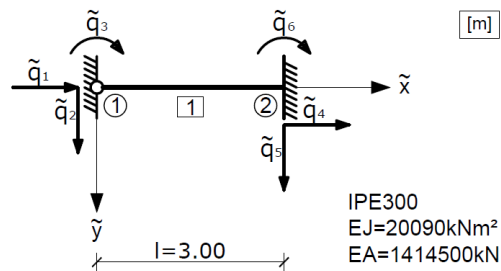
Przeprowadzono redukcję statyczną:

- pręt nr 1 – przegub na lewym końcu,
- pręt nr 3 – przegub na prawym końcu.

Tabela powiązań:

	1	2	3	4	5	6	układ L
pręt 1	1	2	3	5	6	7	układ G
pręt 2	5	6	7	8	9	10	układ G
pręt 3	14	15	16	1	2	4	układ G
pręt 4	5	6	7	11	12	13	układ G

Element nr 1:



Macierz sztywności w układzie globalnym:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 471500 & 0 & 0 & -471500 & 0 & 0 \\ 0 & 2232 & 0 & 0 & -2232 & 6697 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -471500 & 0 & 0 & 471500 & 0 & 0 \\ 0 & -2232 & 0 & 0 & 2232 & -6697 \\ 0 & 6697 & 0 & 0 & -6697 & 20090 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Macierz transformacji jest macierzą jednostkową i zachodzi $\tilde{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{K}_1$. Układ lokalny pokrywa się z układem globalnym.

Wektor $\tilde{\mathbf{R}}^0_{(1)} = \mathbf{R}^0_{(1)} = \mathbf{0}$, gdyż brak obciążenia przęsłowego.

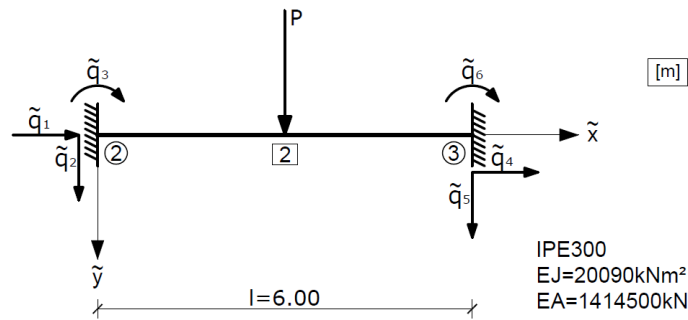
$\alpha = 0^\circ$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0 \\ 0,0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 & 0,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Element nr 2:

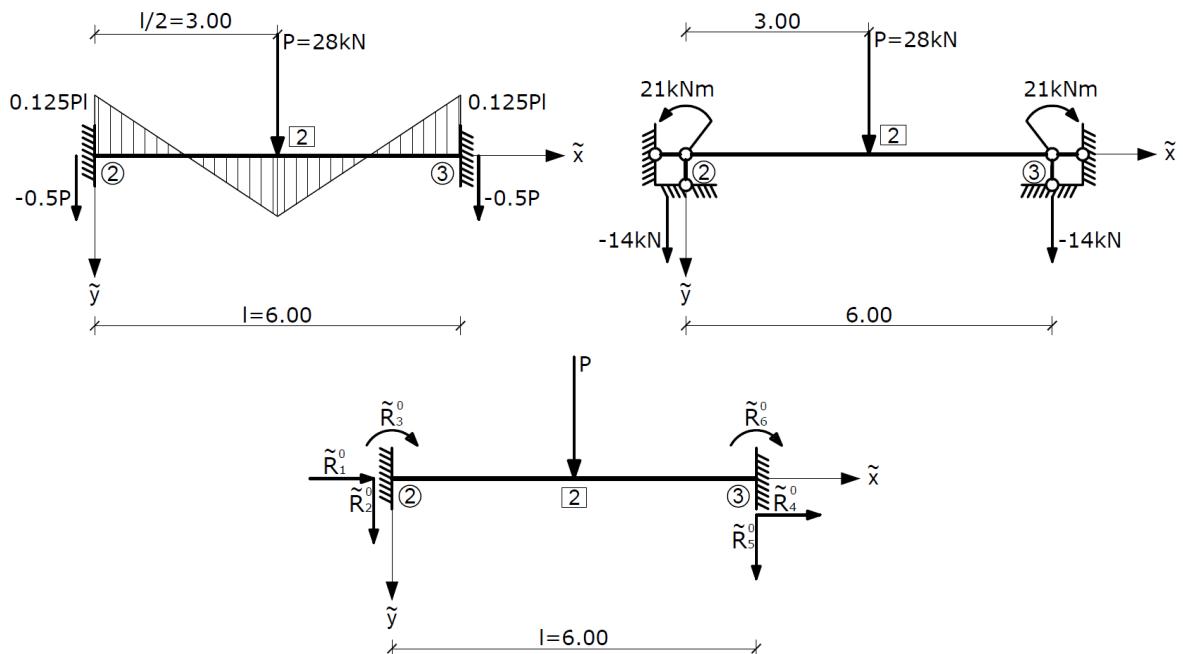


Macierz sztywności w układzie globalnym:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 235750 & 0 & 0 & -235750 & 0 & 0 \\ 0 & 1116 & 3348 & 0 & -1116 & 3348 \\ 0 & 3348 & 13393 & 0 & -3348 & 6697 \\ -235750 & 0 & 0 & 235750 & 0 & 0 \\ 0 & -1116 & -3348 & 0 & 1116 & -3348 \\ 0 & 3348 & 6697 & 0 & -3348 & 13393 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Macierz transformacji jest macierzą jednostkową i zachodzi $\tilde{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K}_2$. Układ lokalny pokrywa się z układem globalnym.

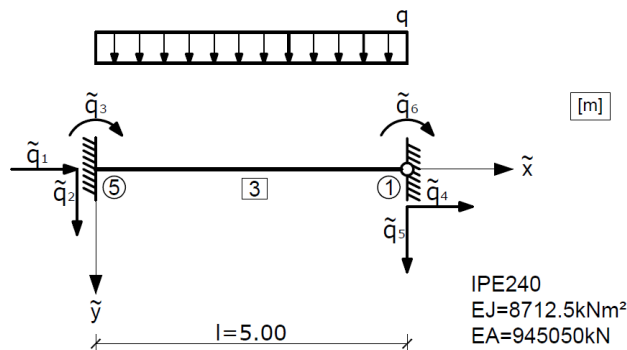
Wektor sił węzłowych od obciążenia przęsłowego w układzie lokalnym:



$$\tilde{\mathbf{R}}^0_{(2)} = \text{col} (0^{(5)}, -14^{(6)}, -21^{(7)}, 0^{(8)}, -14^{(9)}, 21^{(10)})$$

Macierz transformacji jest macierzą jednostkową i zachodzi $\tilde{\mathbf{R}}^0_{(2)} = \mathbf{R}^0_{(2)}$

Element nr 3:



Macierz sztywności w układzie lokalnym:

$$K_{\tilde{3}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 14 & 15 & 16 \end{matrix} & & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 189010 & 0 & 0 \\ 0 & 209 & 1046 \\ 0 & 1046 & 5228 \end{matrix} & & \begin{matrix} -189010 & 0 & 0 \\ 0 & -209 & 0 \\ 0 & -1046 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 14 \\ 15 \\ 16 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Transformacja do układu globalnego: $\alpha = 270^\circ$

Wg wzoru $K = T^T \cdot \tilde{K} \cdot T$ otrzymujemy:

$$C = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0 & -1,0 & 0 \\ 1,0 & 0,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

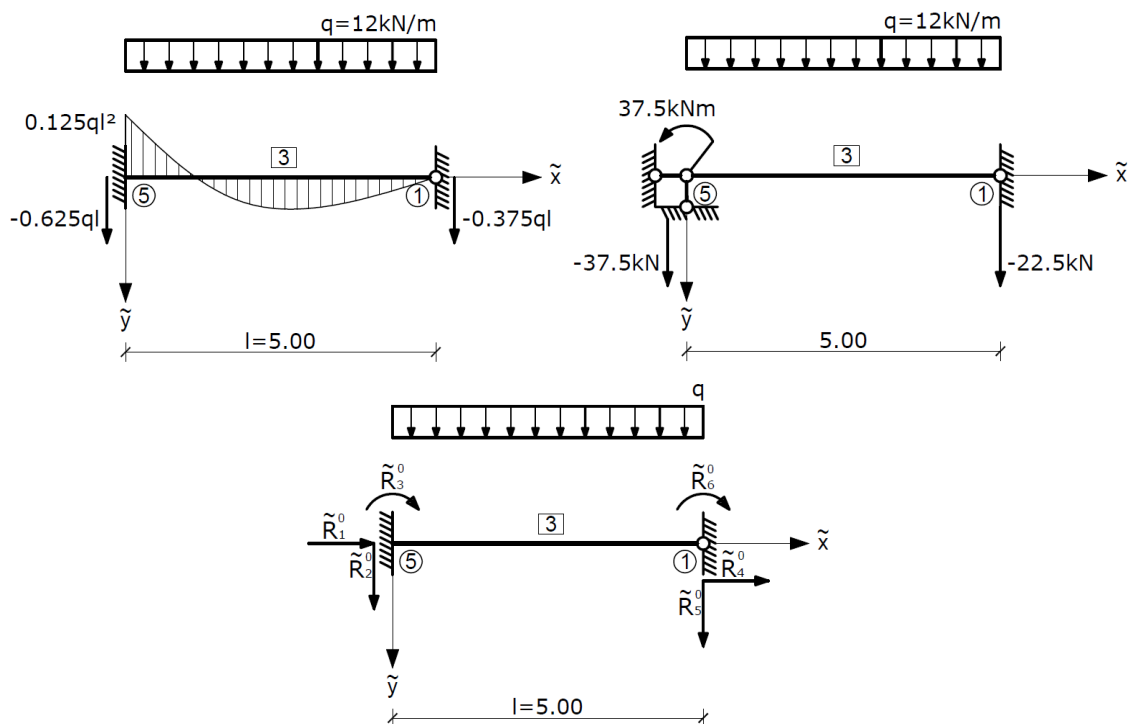
$$T = \begin{vmatrix} \mathbf{0,0} & \mathbf{-1,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1,0} & \mathbf{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0,0} & \mathbf{-1,0} & 0 & \mathbf{0,0} & \mathbf{-1,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1,0} & \mathbf{0,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T_T = \begin{vmatrix} \mathbf{0,0} & \mathbf{1,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1,0} & \mathbf{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0,0} & \mathbf{1,0} & 0 & \mathbf{0,0} & \mathbf{1,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1,0} & \mathbf{0,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Macierz sztywności elementu 3 po transformacji:

$$K_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 14 & 15 & 16 \end{matrix} & & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{209} & \mathbf{0} & \mathbf{1046} \\ \mathbf{0} & \mathbf{189010} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1046} & \mathbf{0} & \mathbf{5228} \end{matrix} & & \begin{matrix} \mathbf{-209} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-189010} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1046} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} & \begin{matrix} 14 \\ 15 \\ 16 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Wektor sił węzłowych od obciążenia przęsłowego w układzie lokalnym:



$$\tilde{\mathbf{R}}_{(3)}^0 = \text{col} (0, -37.5, -37.5, 0, -22.5, 0)$$

Wektor sił węzłowych od obciążenia przęsłowego w układzie globalnym: $\alpha = 270^\circ$

Wg wzoru $\mathbf{R}^0 = \mathbf{T}^T \cdot \tilde{\mathbf{R}}^0$ otrzymujemy:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0 & -1,0 & 0 \\ 1,0 & 0,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

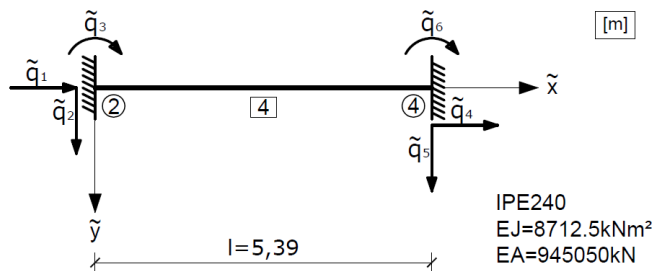
$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{0,0} & \mathbf{-1,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1,0} & \mathbf{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,0} & \mathbf{-1,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1,0} & \mathbf{0,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{03} = \begin{vmatrix} \mathbf{0,0} & \mathbf{1,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1,0} & \mathbf{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,0} & \mathbf{1,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1,0} & \mathbf{0,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 14 \\ 15 \\ 16 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -37,5 \\ -37,5 \\ 0 \\ -22,5 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{-37,5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-37,5} \\ \mathbf{-22,5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{(3)}^0 = \text{col} (\mathbf{-37.5}^{(14)}, \mathbf{0}^{(15)}, \mathbf{-37.5}^{(16)}, \mathbf{-22.5}^{(1)}, \mathbf{0}^{(2)}, \mathbf{0}^{(4)})$$

Element nr 4:



Macierz sztywności w układzie lokalnym:

$$K_{\tilde{4}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 \end{matrix} & & \begin{matrix} 11 & 12 & 13 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 175491 & 0 & 0 \\ 0 & 669 & 1803 \\ 0 & 1803 & 6471 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} -175491 & 0 & 0 \\ 0 & -669 & 1803 \\ 0 & -1803 & 3236 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{matrix} & \begin{vmatrix} -175491 & 0 & 0 \\ 0 & -669 & -1803 \\ 0 & 1803 & 3236 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} 175491 & 0 & 0 \\ 0 & 669 & -1803 \\ 0 & -1803 & 6471 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Transformacja do układu globalnego: $\alpha = 68.20^\circ$

$$C = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,9 & 0 \\ -0,9 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} \mathbf{0,4} & \mathbf{0,9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{-0,9} & \mathbf{0,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,4} & \mathbf{0,9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-0,9} & \mathbf{0,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

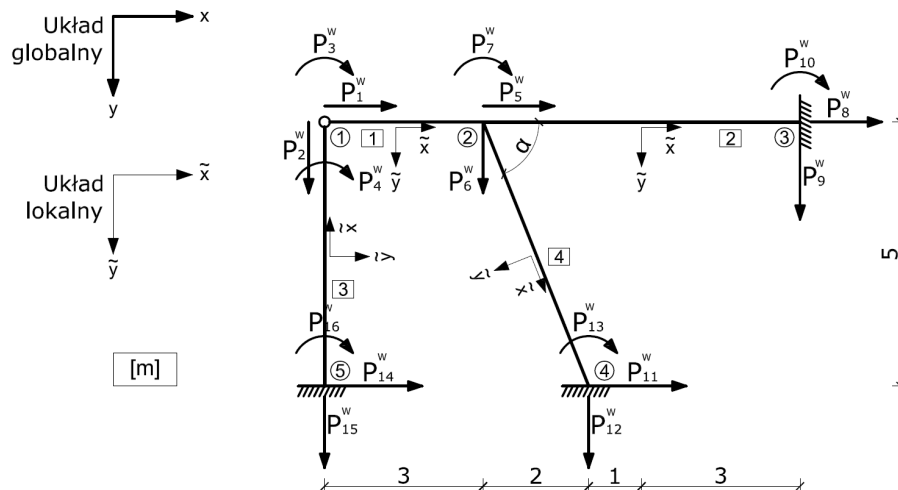
$$T_T = \begin{vmatrix} \mathbf{0,4} & \mathbf{-0,9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0,9} & \mathbf{0,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,4} & \mathbf{-0,9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,9} & \mathbf{0,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Macierz sztywności elementu 4 po transformacji:

$$K_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 \end{matrix} & & \begin{matrix} 11 & 12 & 13 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{24783} & \mathbf{60283} & \mathbf{-1674} \\ \mathbf{60283} & \mathbf{151378} & \mathbf{669} \\ \mathbf{-1674} & \mathbf{669} & \mathbf{6471} \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} \mathbf{-24783} & \mathbf{-60283} & \mathbf{-1674} \\ \mathbf{-60283} & \mathbf{-151378} & \mathbf{669} \\ \mathbf{1674} & \mathbf{-669} & \mathbf{3236} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{matrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{-24783} & \mathbf{-60283} & \mathbf{1674} \\ \mathbf{-60283} & \mathbf{-151378} & \mathbf{-669} \\ \mathbf{-1674} & \mathbf{669} & \mathbf{3236} \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} \mathbf{24783} & \mathbf{60283} & \mathbf{1674} \\ \mathbf{60283} & \mathbf{151378} & \mathbf{-669} \\ \mathbf{1674} & \mathbf{-669} & \mathbf{6471} \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Wektor $\tilde{R}^0_{(4)} = R^0_{(4)} = \mathbf{0}$, gdyż brak obciążenia przęsłowego.

Wektor zewnętrznych sił działających na węzły \mathbf{P}^w



$\mathbf{P}^w = \text{col}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 13, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

$\mathbf{R}^0 = \text{col}(-22.5^{(1)}, 0^{(2)}, 0^{(3)}, 0^{(4)}, 0^{(5)}, -14^{(6)}, -21^{(7)}, 0^{(8)}, -14^{(9)}, 21^{(10)}, 0^{(11)}, 0^{(12)}, 0^{(13)}, -37.5^{(14)}, 0^{(15)}, -37.5^{(16)})$

Wektor: $\mathbf{P} = \mathbf{P}^w - \mathbf{R}^0$

$\mathbf{P} = \text{col}(-(-22.5), 0, 0, 0, 0, -(-14), (13-(-21)), 0, -(-14), -21, 0, 0, 0, -(-37.5), 0, -(-37.5))$

$\mathbf{P} = \text{col}(22.5, 0, 0, 0, 0, 14, 34, 0, 14, -21, 0, 0, 0, 37.5, 0, 37.5)$

Macierz sztywności $[\mathbf{K}]$ układu po agregacji:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	471500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-209	0	-1046
2	209	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	2232	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	189010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	189010	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	-209	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	209	0	1046
15	0	189010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	189010	0
16	-1046	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1046	0	5228
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	471709	0	0	0	471500	0	0	0	0	0	0	0	0	-209	0	-1046	1
2	0	191242	0	0	0	-2232	6697	0	0	0	0	0	0	0	189010	0	2
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
5	471500	0	0	0	732033	60283	-1674	235750	0	0	-24783	-60283	-1674	0	0	0	5
6	0	-2232	0	0	60283	154726	-2679	0	-1116	3348	-60283	151378	669	0	0	0	6
7	0	6697	0	0	-1674	-2679	39955	0	-3348	6697	1674	-669	3236	0	0	0	7
8	0	0	0	0	235750	0	0	235750	0	0	0	0	0	0	0	0	8
9	0	0	0	0	0	-1116	-3348	0	1116	-3348	0	0	0	0	0	0	9
10	0	0	0	0	0	3348	6697	0	-3348	13393	0	0	0	0	0	0	10
11	0	0	0	0	-24783	-60283	1674	0	0	0	24783	60283	1674	0	0	0	11
12	0	0	0	0	-60283	151378	-669	0	0	0	60283	151378	-669	0	0	0	12
13	0	0	0	0	-1674	669	3236	0	0	0	1674	-669	6471	0	0	0	13
14	-209	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	209	0	1046	14
15	0	189010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	189010	0	15
16	-1046	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1046	0	5228	16
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

Układ równań metody przemieszczeń:

Po uwzględnieniu warunków podparcia $q_{8-16}=0$ oraz redukcji momentów $M_{3-4}=0$ otrzymujemy macierz.

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 471709 & 0 & -471500 & 0 & 0 \\ 0 & 191242 & 0 & -2232 & 6697 \\ -471500 & 0 & 732033 & 60283 & -1674 \\ 0 & -2232 & 60283 & 154726 & -2679 \\ 0 & 6697 & -1674 & -2679 & 39955 \end{vmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 22,5 \\ 0 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \end{vmatrix}$$

Wg wzoru $\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{P}$ otrzymujemy:

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,0001219 \\ -0,0000294 \\ 0,0000742 \\ 0,0000761 \\ 0,0008641 \end{vmatrix}$$

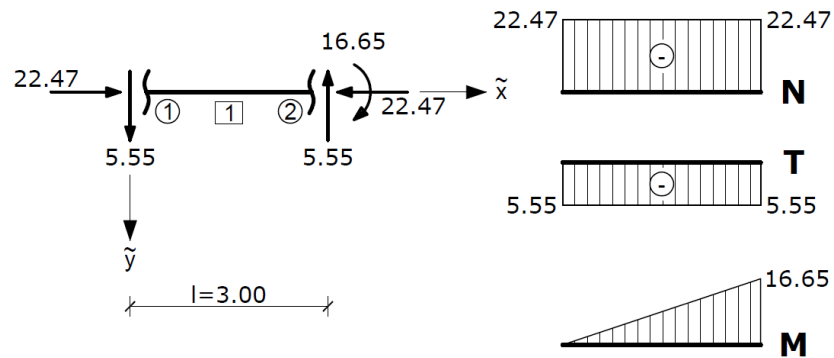
Siły przywęzłowe w elemencie nr 1:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{R}}^0$$

Wektor $\tilde{\mathbf{R}}^0_{(1)} = \mathbf{0}$, gdyż brak obciążenia przęsłowego.

Macierz transformacji jest macierzą jednostkową i zachodzi $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$. Układ lokalny pokrywa się z układem globalnym.

$$\mathbf{R}^{\sim}_1 = \begin{array}{c|ccc|ccc|c|c} & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & & \\ \hline & 471500 & 0 & 0 & -471500 & 0 & 0 & 1 & 0,0001219 & 22,47 \\ & 0 & 2232 & 0 & 0 & -2232 & 6697 & 2 & -0,0000294 & 5,55 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline & -471500 & 0 & 0 & 471500 & 0 & 0 & 5 & 0,0000742 & -22,47 \\ & 0 & -2232 & 0 & 0 & 2232 & -6697 & 6 & 0,0000761 & -5,55 \\ & 0 & 6697 & 0 & 0 & -6697 & 20090 & 7 & 0,0008641 & 16,65 \end{array} =$$



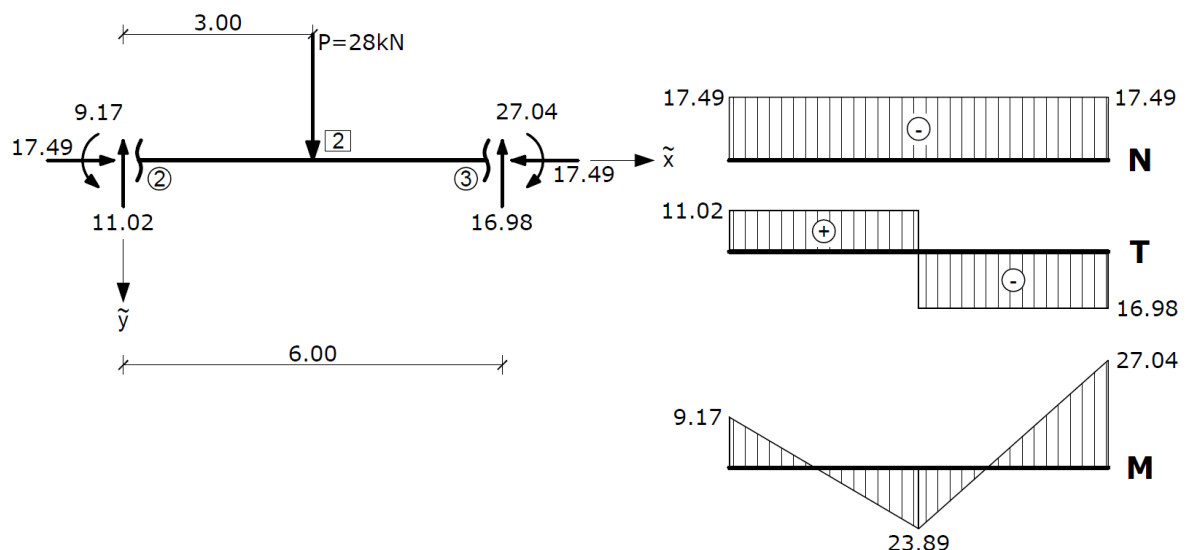
$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \text{col} (22.47, 5.55, 0, -22.47, -5.55, 16.65)$$

Siły przywęzłowe w elemencie nr 2:

Macierz transformacji jest macierzą jednostkową i zachodzi $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$.

$$\mathbf{R}^{\sim}_2 = \begin{array}{c|ccc|ccc|c|c} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & & \\ \hline & 235750 & 0 & 0 & -235750 & 0 & 0 & 5 & 0,0000742 & 17,49 \\ & 0 & 1116 & 3348 & 0 & -1116 & 3348 & 6 & 0,0000761 & 2,98 \\ & 0 & 3348 & 13393 & 0 & -3348 & 6697 & 7 & 0,0008641 & 11,83 \\ \hline & -235750 & 0 & 0 & 235750 & 0 & 0 & 8 & 0 & -17,49 \\ & 0 & -1116 & -3348 & 0 & 1116 & -3348 & 9 & 0 & -2,98 \\ & 0 & 3348 & 6697 & 0 & -3348 & 13393 & 10 & 0 & 6,04 \end{array} =$$

$$\tilde{\mathbf{R}}^0_{(2)} = \text{col} (0, -14, -21, 0, -14, 21)$$



$$\tilde{\mathbf{R}}_2 = \text{col} (17.49, -11.02, -9.17, -17.49, -16.98, 27.04)$$

Siły przywęzłowe w elemencie nr 3:

Przemieszczenia w układzie lokalnym: $\alpha = 270^\circ$

Wg wzoru $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}$ otrzymujemy:

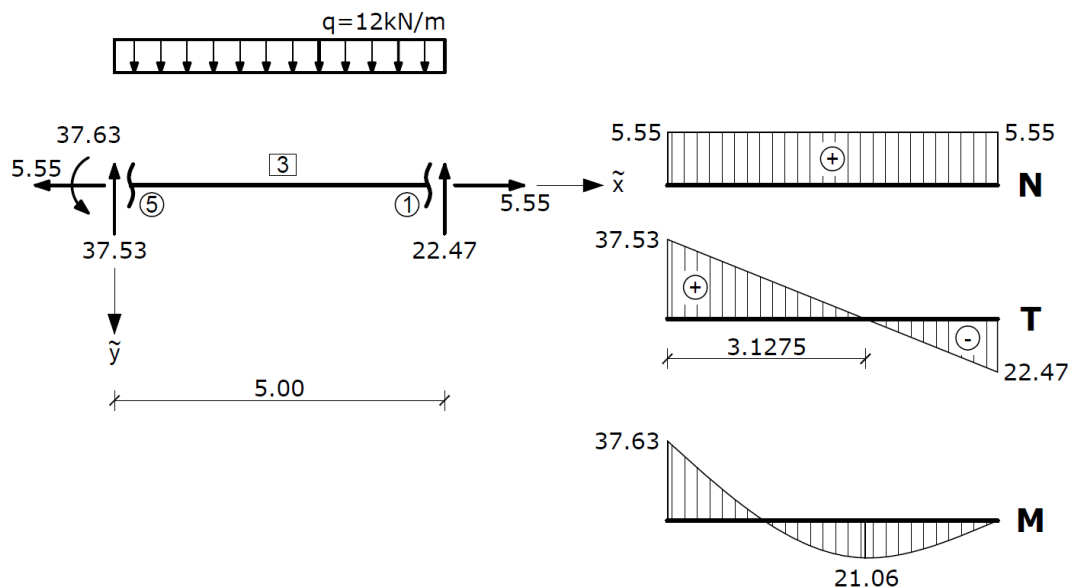
$$C = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0 & -1,0 & 0 \\ 1,0 & 0,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_3 = \begin{vmatrix} 0,0 & -1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,0 & 0,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0 & -1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 & 0,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 14 \\ 15 \\ 16 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0001219 \\ -0,0000294 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0000294 \\ 0,0001219 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_3 = \begin{vmatrix} 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 4 \\ 189010 & 0 & 0 & -189010 & 0 & 0 \\ 0 & 209 & 1046 & 0 & -209 & 0 \\ 0 & 1046 & 5228 & 0 & -1046 & 0 \\ -189010 & 0 & 0 & 189010 & 0 & 0 \\ 0 & -209 & -1046 & 0 & 209 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 14 \\ 15 \\ 16 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0000294 \\ 0,0001219 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} -5,55 \\ -0,03 \\ -0,13 \\ 5,55 \\ 0,03 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}^0_{(3)} = \text{col}(0, -37.5, -37.5, 0, -22.5, 0)$$



$$\tilde{\mathbf{R}}_3 = \text{col}(-5.55, -37.53, -37.63, 5.55, -22.47, 0)$$

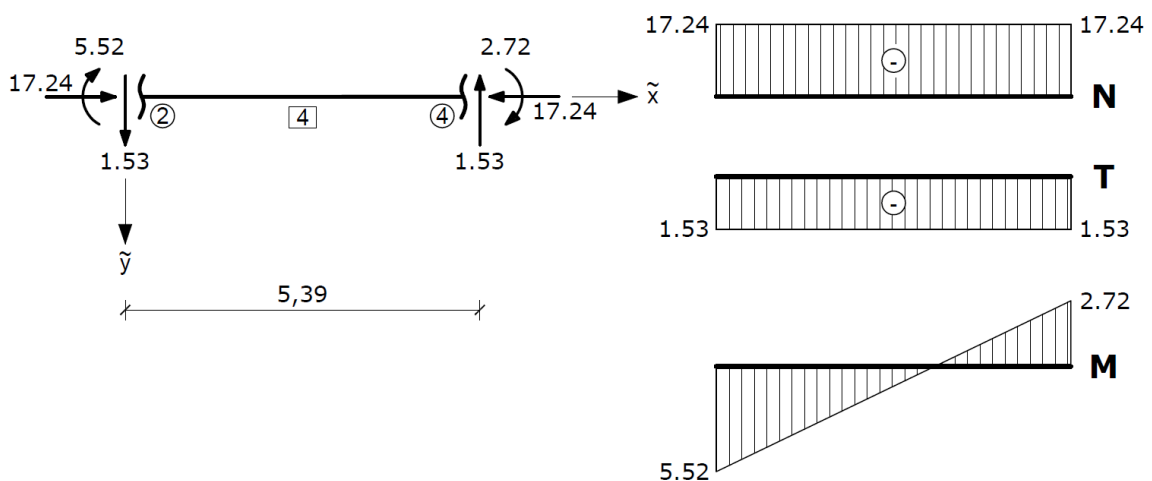
Siły przywęzłowe w elemencie nr 4:Przemieszczenia w układzie lokalnym: $\alpha = 68.20^\circ$

$$C = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,9 & 0 \\ -0,9 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

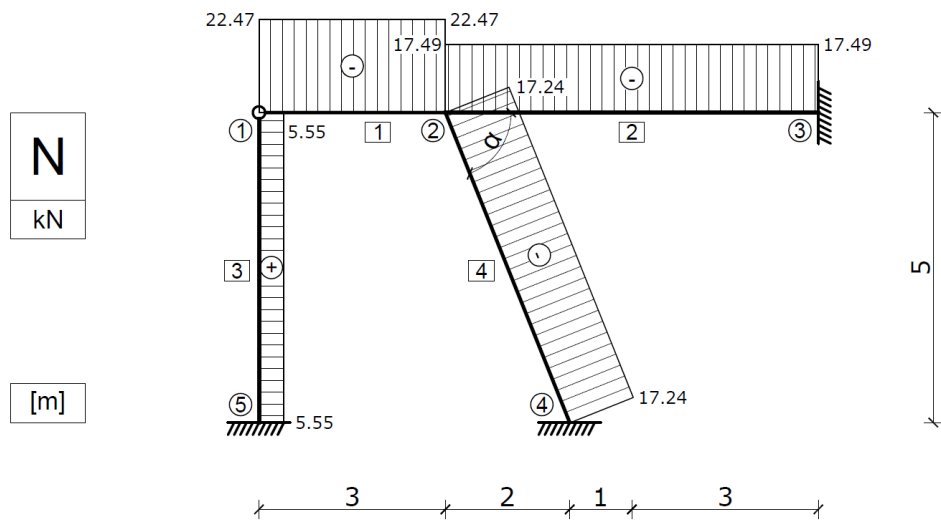
$$\tilde{q}_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{0,4} & \mathbf{0,9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{-0,9} & \mathbf{0,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0,4} & \mathbf{0,9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-0,9} & \mathbf{0,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0,0000742 \\ 0,0000761 \\ 0,0008641 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0,0000982} \\ \mathbf{-0,0000406} \\ \mathbf{0,0008641} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

$$\tilde{R}_4 = \begin{vmatrix} 175491 & 0 & 0 & -175491 & 0 & 0 \\ 0 & 669 & 1803 & 0 & -669 & 1803 \\ 0 & 1803 & 6471 & 0 & -1803 & 3236 \\ -175491 & 0 & 0 & 175491 & 0 & 0 \\ 0 & -669 & -1803 & 0 & 669 & -1803 \\ 0 & 1803 & 3236 & 0 & -1803 & 6471 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0,0000982 \\ -0,0000406 \\ 0,0008641 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{17,24} \\ \mathbf{1,53} \\ \mathbf{5,52} \\ \mathbf{-17,24} \\ \mathbf{-1,53} \\ \mathbf{2,72} \end{vmatrix}$$

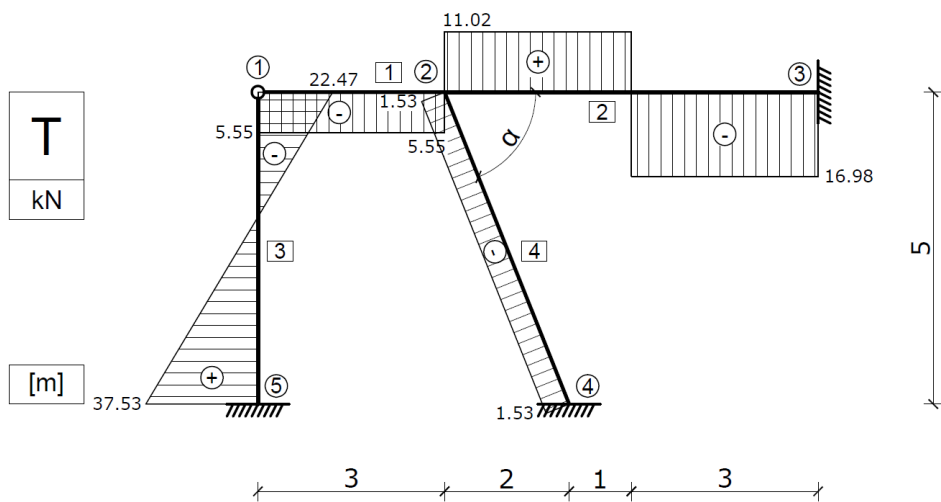
Wektor $\tilde{R}_{(4)}^0 = \mathbf{0}$, gdyż brak obciążenia przęsłowego.

$$\tilde{R}_4 = \text{col}(\mathbf{17,24}, \mathbf{1,53}, \mathbf{5,52}, \mathbf{-17,24}, \mathbf{-1,53}, \mathbf{2,72})$$

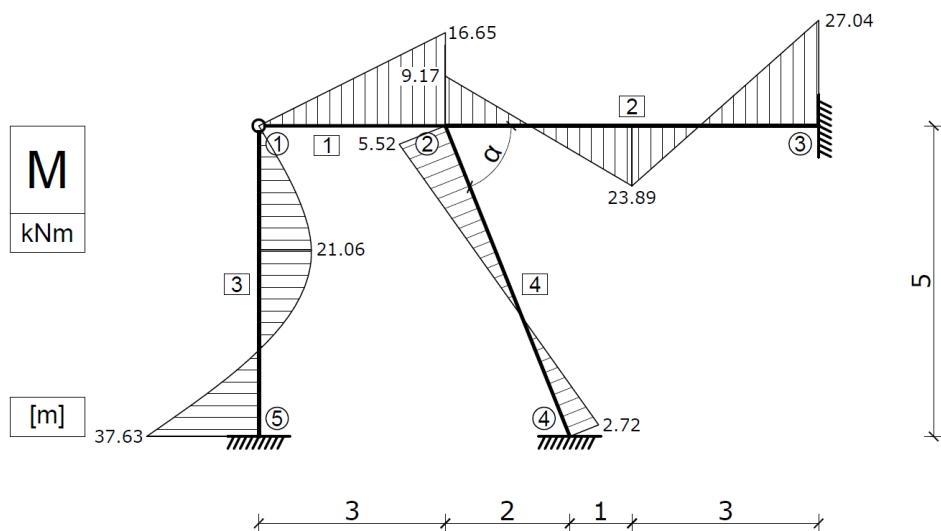
Wykres sił normalnych:



Wykres sił tnących:

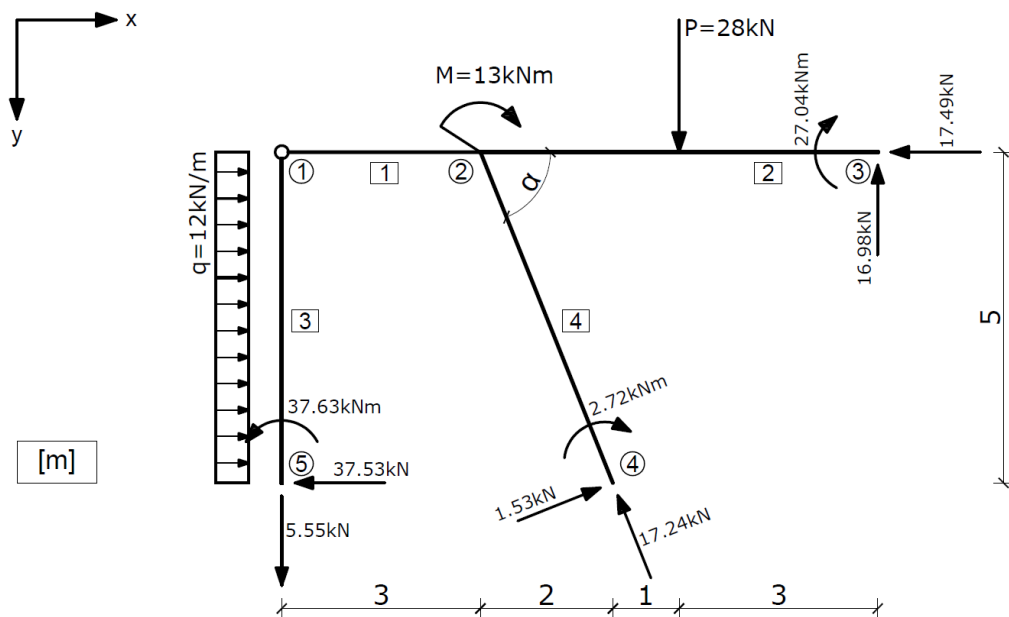


Wykres momentów zginających:



Kontrola statyczna:

$$\alpha = 68.20^\circ \Rightarrow \cos \alpha = 0.371 \wedge \sin \alpha = 0.928$$



$$\sum X = 60 + 1.53 \cdot \sin \alpha - 37.53 - 17.49 - 17.24 \cdot \cos \alpha = 0.0038 \text{ kN} \approx 0$$

$$\sum Y = 5.55 - 1.53 \cdot \cos \alpha - 17.24 \cdot \sin \alpha + 28 - 16.98 = 0.0037 \text{ kN} \approx 0$$

$$\sum M_1 = -37.63 + 2.72 + 13 + 27.04 + 37.53 \cdot 5 + 28 \cdot 6 - 16.98 \cdot 9 - 12 \cdot 5 \cdot 2.5 - 17.24 \cdot \sin \alpha \cdot 5 + 17.24 \cdot \cos \alpha \cdot 5 - 1.53 \cdot \sin \alpha \cdot 5 - 1.53 \cdot \cos \alpha \cdot 5 = 0.0093 \text{ kNm} \approx 0$$

Kontrola kinematyczna, przemieszczenie poziome punktu „4”

Twierdzenie redukcyjne:

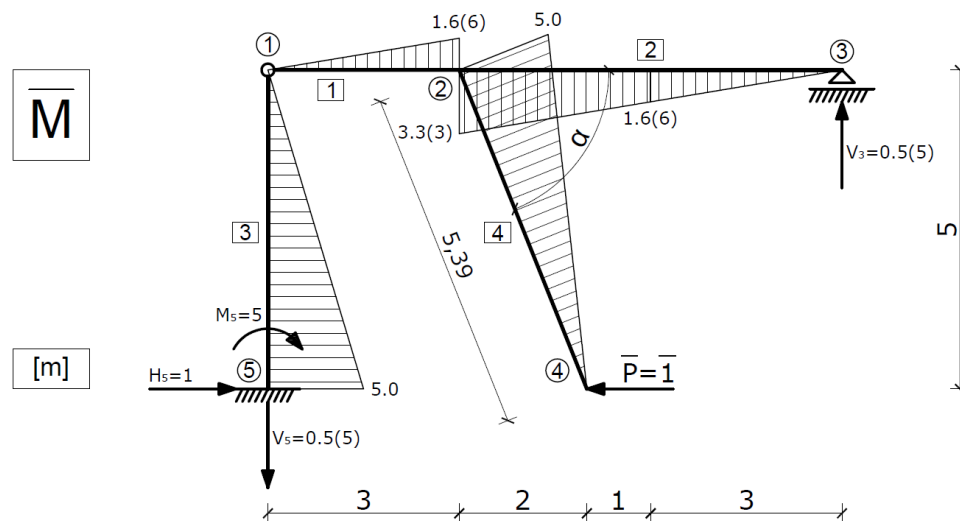
$$\bar{P}_i \cdot \delta_i = \sum_{n=1}^N \int_s \bar{M}_i \cdot \left(\frac{M_p}{EJ} \right) ds$$

gdzie: \bar{P}_i - obciążenie wirtualne przyłożone do przekroju i, odpowiadające szukanemu przemieszczeniu δ_i ,

δ_i - szukane uogólnione przemieszczenie przekroju i,

\bar{M}_i - momenty zginające wywołane obciążeniem wirtualnym $\bar{P} = 1$,

M_p - momenty zginające od obciążenia zewnętrznego.

Wykres wirtualnych momentów zginających:**Przemieszczenie poziome punktu „4”**

$$\bar{1} \cdot \delta_4 = \sum \int \bar{M} \cdot \left(\frac{M_P}{EJ} \right) dx = 0$$

$$\delta_4 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{EJ_{3-4}} \cdot \left\{ -\frac{5}{6} \cdot 2 \cdot 37.63 \cdot 5.0 + \frac{2}{3} \cdot 5.0 \cdot \frac{12 \cdot 5.0^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5.0 - \frac{5.39}{6} \cdot \left(2 \cdot 5.52 \cdot 5.0 + \right. \right. \\ \left. \left. - 2.72 \cdot 5.0 \right) \right\} + \\ \frac{1}{EJ_{1-2}} \cdot \left\{ \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot 16.65 \cdot 1.6(6) - \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 9.17 \cdot 3.3(3) - 2 \cdot 23.89 \cdot 1.6(6) + 9.17 \cdot 1.6(6) + \right. \\ \left. - 23.89 \cdot 3.3(3)) + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 23.89 \cdot 1.6(6) - 27.04 \cdot 1.6(6)) \right\} \end{array} \right\}$$

$$\delta_4 = -\frac{38.373 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EJ_{3-4}} + \frac{86.474 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EJ_{1-2}} = -\frac{38.373 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{8712.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} + \frac{86.474 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{20090 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} = -0.00010 \text{ m} \approx 0$$

Komentarz:

Otrzymane przemieszczenie punktu „4” wynosi -0.1mm. Wynik jest nieprecyzyjny i wskazuje na błąd obliczeniowy, który jest spowodowany zbyt małym zaokrągleniem wartości sił przywęzłowych. Poprawność wykresów sił wewnętrznych N, T, M potwierdzono w programie obliczeniowym Rm-win.