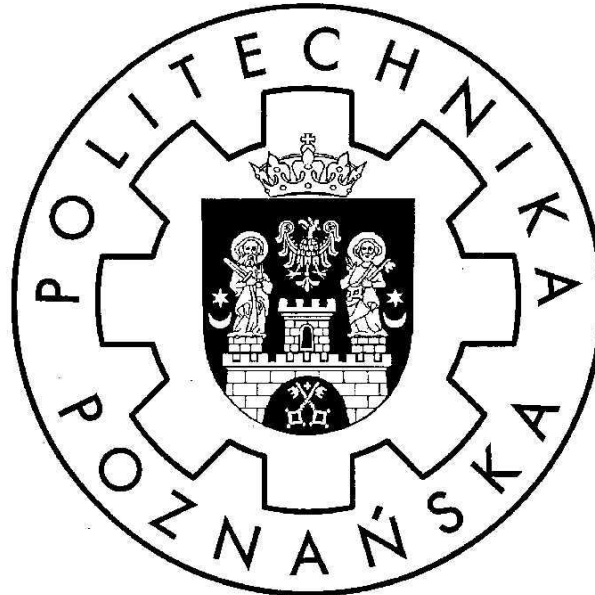
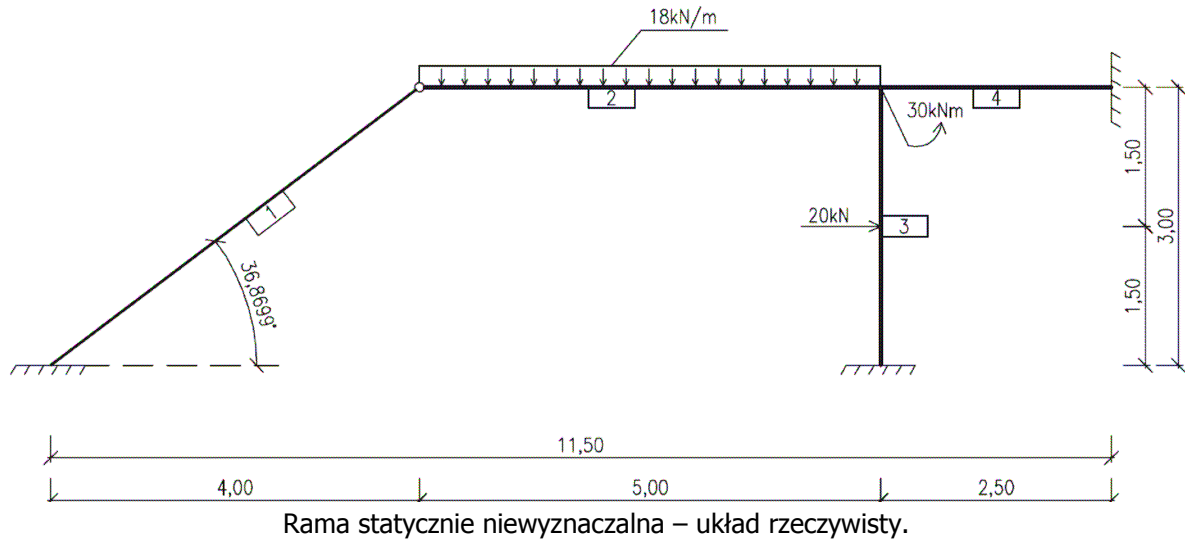


Politechnika Poznańska
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska
Instytut Konstrukcji Budowlanych
Zakład Mechaniki Budowli



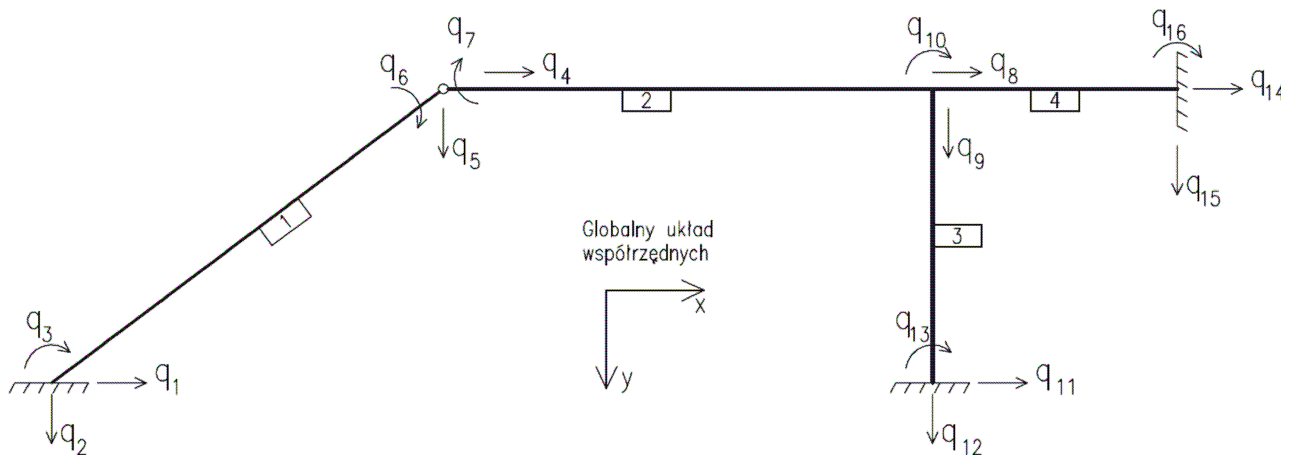
Ćwiczenie projektowe nr 1
Komputerowa wersja metody przemieszczeń

Konsultacje: *mgr inż. A. Kaczor*
Wykonał: *Przemysław Woźny*
SUM KBI II s. II
r.a. 2009/2010

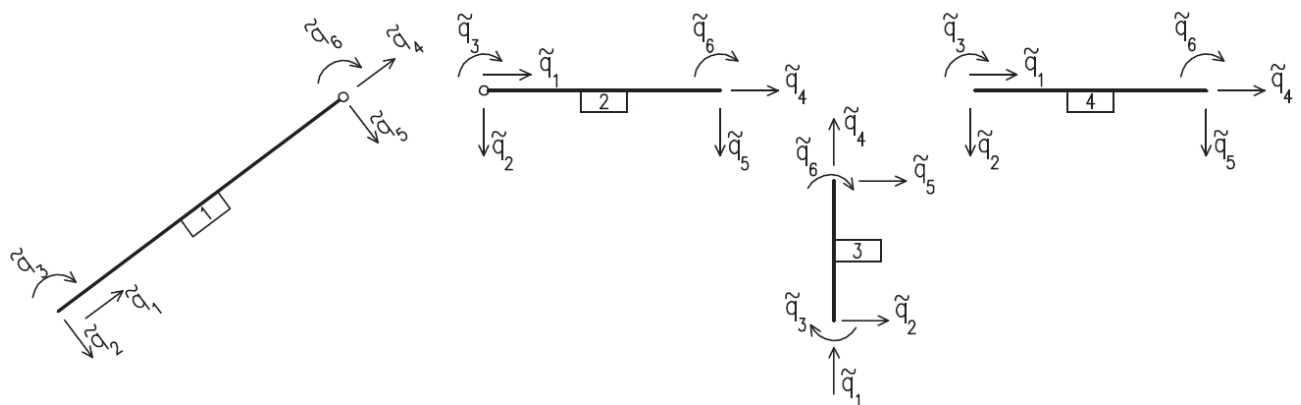


Przyjęto następujące profile walcowane:

- słupy (pręty nr 1 i 3): IPN 300 $I_x=9800$ [cm⁴] $A=69,00$ [cm²]
- rygle (pręty nr 2 i 4): IPN 240 $I_x= 4250$ [cm⁴] $A=46,10$ [cm²]

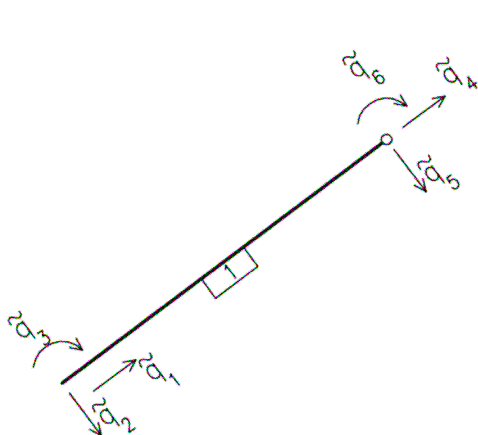


Przyjęcie globalnego układu współrzędnych i globalnych przemieszczeń węzłów.



Lokalne przemieszczenia węzłów poszczególnych prętów układu

Pręt nr 1



Pręt z przegubem na prawym końcu
 $\alpha = -36,8699^\circ$ $\cos \alpha = 0,8$ $\sin \alpha = -0,6$

Macierz sztywności pręta w układzie lokalnym

$$K_1 = \begin{vmatrix} 282900,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -282900,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 482,1600 & 2410,8000 & 0,0000 & -482,1600 & 0,0000 \\ 0,0000 & 2410,8000 & 12054,0000 & 0,0000 & -2410,8000 & 0,0000 \\ -282900,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 282900,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -482,1600 & -2410,8000 & 0,0000 & 482,1600 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{vmatrix}$$

Macierz transformacji pręta

$$T = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{vmatrix}$$

Macierz transponowana macierzy transformacji pręta

$$T^T = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Macierz sztywności pręta w układzie globalnym

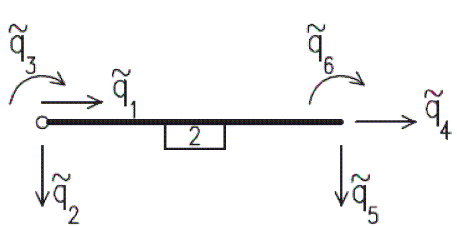
$$K_1 = \begin{vmatrix} 181229,5665 & -135560,5664 & 1446,4801 & -181229,5665 & 135560,5664 & 0,0000 \\ -135560,5664 & 102152,5935 & 1928,6399 & 135560,5664 & -102152,5935 & 0,0000 \\ 1446,4801 & 1928,6399 & 12054,0000 & -1446,4801 & -1928,6399 & 0,0000 \\ -181229,5665 & 135560,5664 & -1446,4801 & 181229,5665 & -135560,5664 & 0,0000 \\ 135560,5664 & -102152,5935 & -1928,6399 & -135560,5664 & 102152,5935 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{vmatrix}$$

Pręt nr 1 nie jest obciążony na przęśle, stąd wektor sił przywęzłowych od obciążeń przęsłowych jest równy 0.

Wektor sił przywęzłowych od obciążeń przęsłowych

$$\tilde{R}_1^0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Pręt nr 2



Pręt z przegubem na lewym końcu
 $\alpha=0,00^\circ$ $\cos \alpha=1$ $\sin \alpha=0$ (lokalny układ współrzędnych pokrywa się z globalnym układem współrzędnych)

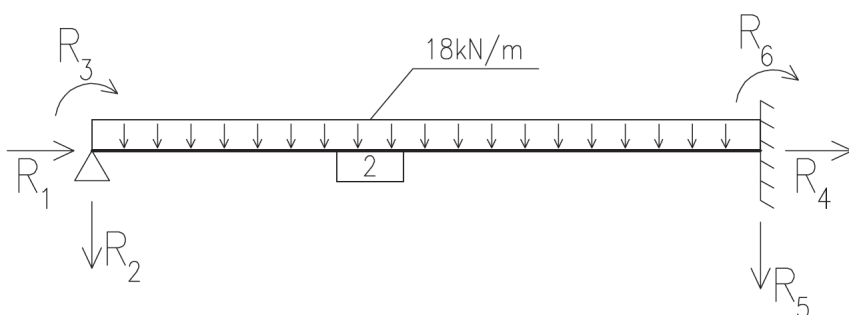
Macierz sztywności pręta w układzie lokalnym i globalnym

$$\bar{K}_2 = K_2 = \begin{vmatrix} 189010 & 0 & 0 & -189010 & 0 & 0 \\ 0 & 209,1 & 0 & 0 & -209,1 & 1045,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -189010 & 0 & 0 & 189010 & 0 & 0 \\ 0 & -209,1 & 0 & 0 & 209,1 & -1045,5 \\ 0 & 1045,5 & 0 & 0 & -1045,5 & 5227,5 \end{vmatrix}$$

Obciążenie przęsłowe pręta:

Wzory na reakcje przywęzłowe od obciążeń przęsłowych dla belki statycznie niewyznaczalnej z jednej strony podpartej przegubowo, a z drugiej utwierdzonej:

$$R_6 = \frac{ql^2}{8}; R_5 = -\frac{5ql}{8}; R_2 = -\frac{3ql}{8}$$

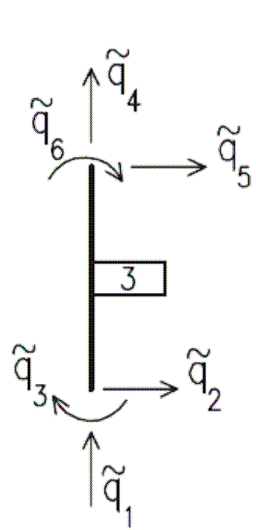


- $R_1=0,00$ [kN]
- $R_2=-33,75$ [kN]
- $R_3=0,00$ [kNm]
- $R_4=0,00$ [kN]
- $R_5=-56,25$ [kN]
- $R_6=56,25$ [kNm]

Wektor sił przywęzłowych od obciążeń przęsłowych

$$\bar{R}_2^0 = R_2^0 = \begin{vmatrix} 0 \\ -33,75 \\ 0 \\ 0 \\ -56,25 \\ 56,25 \end{vmatrix}$$

Pręt nr 3



Pręt obustronnie utwierdzony
 $\alpha = -90,00^\circ$ $\cos \alpha = 0$ $\sin \alpha = -1$

Macierz sztywności pręta w układzie lokalnym

$$\bar{K}_3 = \begin{vmatrix} 471500 & 0 & 0 & -471500,0 & 0 & 0 \\ 0 & 8928,889 & 13393,33 & 0 & -8928,89 & 13393,33 \\ 0 & 13393,33 & 26786,67 & 0 & -13393,3 & 13393,33 \\ -471500 & 0 & 0 & 471500,0 & 0 & 0 \\ 0 & -8928,89 & -13393,3 & 0 & 8928,889 & -13393,3 \\ 0 & 13393,33 & 13393,33 & 0 & -13393,3 & 26786,67 \end{vmatrix}$$

Macierz transformacji pręta

$$T = \begin{vmatrix} 0,0000 & -1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,0000 & 0,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0000 & -1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Macierz transponowana macierzy transformacji pręta

$$T^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

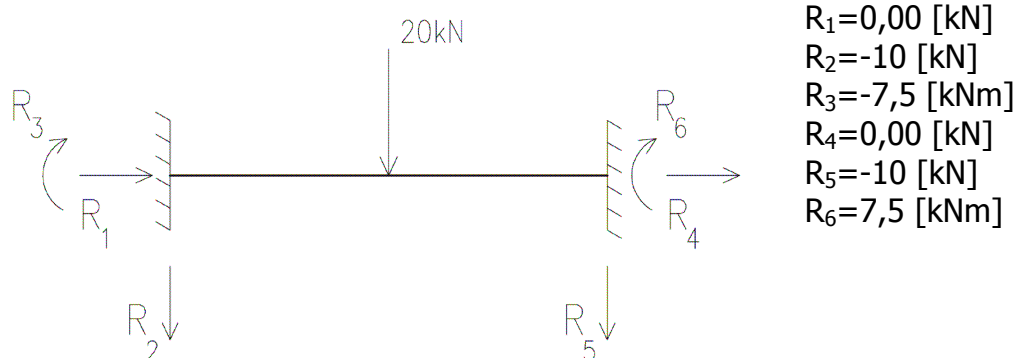
Macierz sztywności pręta w układzie globalnym

8928,8889	0,0000	13393,3333	-8928,8889	0,0000	13393,3333
0,0000	471500,0000	0,0000	0,0000	-471500,0000	0,0000
13393,3333	0,0000	26786,6667	-13393,3333	0,0000	13393,3333
-8928,8889	0,0000	-13393,3333	8928,8889	0,0000	-13393,3333
0,0000	-471500,0000	0,0000	0,0000	471500,0000	0,0000
13393,3333	0,0000	13393,3333	-13393,3333	0,0000	26786,6667

Obciążenie przeszłowe pręta:

Wzory na reakcje przywęzłowe od obciążeń przeszłowych dla belki statycznie niewyznaczalnej obustronnie utwierdzonej:

$$R_6 = \frac{Pl}{8}; R_5 = -\frac{P}{2}; R_3 = -\frac{Pl}{8}; R_2 = -\frac{P}{2}$$



$$\begin{aligned} R_1 &= 0,00 \text{ [kN]} \\ R_2 &= -10 \text{ [kN]} \\ R_3 &= -7,5 \text{ [kNm]} \\ R_4 &= 0,00 \text{ [kN]} \\ R_5 &= -10 \text{ [kN]} \\ R_6 &= 7,5 \text{ [kNm]} \end{aligned}$$

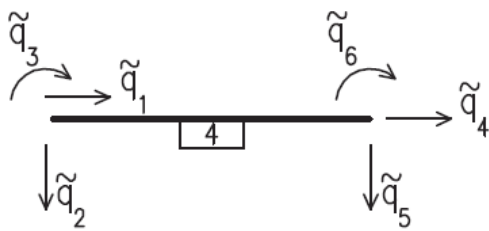
Wektor sił przywęzłowych od obciążeń przeszłowych w lokalnym układzie współrzędnych:

$$R_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -7,5 \\ 0 \\ -10 \\ 7,50 \end{pmatrix}$$

Wektor sił przywęzłowych od obciążeń przeszłowych w globalnym układzie współrzędnych:

$$R_2^0 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -7,5 \\ -10 \\ 0 \\ 7,50 \end{pmatrix}$$

Pręt nr 4



Pręt obustronnie utwierdzony
 $\alpha=0,00^\circ$ $\cos \alpha=1$ $\sin \alpha=0$ (lokalny układ współrzędnych pokrywa się z globalnym układem współrzędnych)

Macierz sztywności pręta w układzie lokalnym i globalnym:

$$\tilde{K}_4 = K_4 = \begin{vmatrix} 378020,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -378020,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 6691,2000 & 8364,0000 & 0,0000 & -6691,2000 & 8364,0000 \\ 0,0000 & 8364,0000 & 13940,0000 & 0,0000 & -8364,0000 & 6970,0000 \\ -378020,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 378020,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -6691,2000 & -8364,0000 & 0,0000 & 6691,2000 & -8364,0000 \\ 0,0000 & 8364,0000 & 6970,0000 & 0,0000 & -8364,0000 & 13940,0000 \end{vmatrix}$$

Pręt nr 4 nie jest obciążony na przęśle, stąd wektor sił przywęzłowych od obciążeń przęsłowych jest równy 0.

Wektor sił przywęzłowych od obciążeń przęsłowych:

$$\tilde{R}_4^0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Macierz sztywności całego układu po agregacji:

181229,5665	-135560,5664	1446,4801	-181229,5665	135560,5664	0,00	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
-135560,5664	102152,5935	1928,6399	135560,5664	-102152,5935	0,00	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1446,4801	1928,6399	12054,0000	-1446,4801	-1928,6399	0,00	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
-181229,5665	135560,5664	-1446,4801	370239,5665	-135560,5664	0,00	0,00	-189010,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
135560,5664	-102152,5935	-1928,6399	-135560,5664	102361,6935	0,00	0,00	0,0000	-209,1000	1045,5000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	-189010,0000	0,0000	0,00	0,00	575958,8889	0,0000	-13393,3333	-8928,89	0,00	-13393,33	-378020,00	0,00	0,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-209,1000	0,00	0,00	0,0000	478400,3000	7318,5000	0,00	-471500,00	0,00	0,00	-6691,20	8364,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1045,5000	0,00	0,00	-13393,3333	7318,5000	45954,1667	13393,33	0,00	13393,33	0,00	-8364,00	6970,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	-8928,8889	0,0000	13393,3333	8928,89	0,00	13393,33	0,00	0,00	0,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,0000	-471500,0000	0,0000	0,00	471500,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	-13393,3333	0,0000	13393,3333	13393,33	0,00	26786,67	0,00	0,00	0,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	-378020,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	378020,00	0,00	0,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,0000	-6691,2000	-8364,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	6691,20	-8364,00	0,00
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,0000	8364,0000	6970,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	-8364,00	13940,00	0,00

Tablica powiązań

Nr pręta	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	7	8	9	10
3	11	12	13	8	9	10
4	8	9	10	14	15	16

-pręt nr 1
-pręt nr 2
-pręt nr 3
-pręt nr 4

Wektor obciążeń węzłowych:

$$P_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wektor obciążeń węzłowych od obciążeń przęsłowych:

$$R^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -33,75 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -56,25 \\ 63,75 \\ -10 \\ 0 \\ -7,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wektor obciążeń układu $P=P_W-R^0$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 33,75 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 56,25 \\ -93,75 \\ 10 \\ 0 \\ 7,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych, oraz wykonaniu redukcji statycznej węzła nr 2 (przemieszczenia q_6 i q_7) otrzymano następujący układ równań:

$$\begin{vmatrix} 370\,239,5665 & -135\,560,5664 & -189\,010,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -135\,560,5664 & 102\,361,6935 & 0,0000 & -209,1000 & 1\,045,5000 \\ -189\,010,0000 & 0,0000 & 575\,958,8889 & 0,0000 & -13\,393,3333 \\ 0,0000 & -209,1000 & 0,0000 & 478\,400,3000 & 7\,318,5000 \\ 0,0000 & 1\,045,5000 & -13\,393,3333 & 7\,318,5000 & 45\,954,1667 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 33,75 \\ 10 \\ 56,25 \\ -93,75 \end{vmatrix}$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymano wektor przemieszczeń węzłów układu:

$$q = \begin{vmatrix} 0,0003249675 \text{ [m]} \\ 0,0007814172 \text{ [m]} \\ 0,0000761147 \text{ [m]} \\ 0,0001494263 \text{ [m]} \\ -0,0020594676 \text{ [rad]} \end{vmatrix}$$

Wektory przemieszczeń poszczególnych prętów w układzie globalnym:

Pręt nr 1	Pręt nr 2	Pręt nr 3	Pręt nr 4
0	0,0003249675	0	0,0000761147
0	0,0007814172	0	0,0001494263
0	$q_7=7^*$	0	-0,0020594676
0,0003249675	0,0000761147	0,0000761147	0
0,0007814172	0,0001494263	0,0001494263	0
$q_6=7^*$	-0,0020594676	-0,002059468	0

* W prętach nr 1 i 2 występują niewiadome kąty obrotu (q_6 i q_7). Ponieważ zastosowano redukcję statyczną na poziomie prętów, wartości tych przemieszczeń nie wyznaczono, nie są one jednak potrzebne do dalszych obliczeń. Z przyczyn czysto technicznych (obliczenia w programie Excel) można w tym miejscu wstawić dowolną liczbę.

Wektory przemieszczeń poszczególnych prętów w układach lokalnych:

Pręt nr 1	Pręt nr 2	Pręt nr 3	Pręt nr 4
0	0,0003249675	0	0,0000761147
0	0,0007814172	0	0,0001494263
0	$q_7=7^*$	0	-0,0020594676
-0,0002088764	0,0000761147	-0,0001494263	0
0,0008201142	0,0001494263	0,0000761147	0
$q_6=7^*$	-0,0020594676	-0,002059468	0

Obliczanie sił wewnętrznych

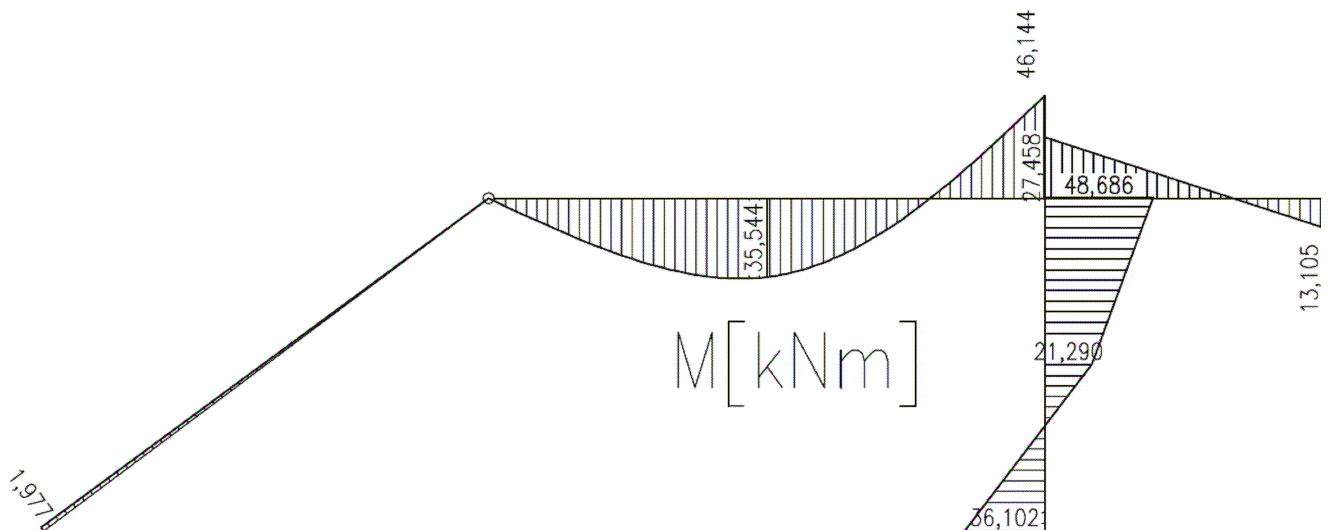
Korzystając z równania równowagi elementu obliczono wektory sił przywęzłowych w poszczególnych prętach układu.

Pręt nr 1	Pręt nr 2	Pręt nr 3	Pręt nr 4
59,091	47,036	70,455	28,773
-0,395	-35,771	-38,263	-16,223
-1,977	0	-36,103	-27,459
-59,091	-47,036	-70,455	-18,773
0,395	-54,229	18,263	16,226
0	46,145	-48,686	-13,105

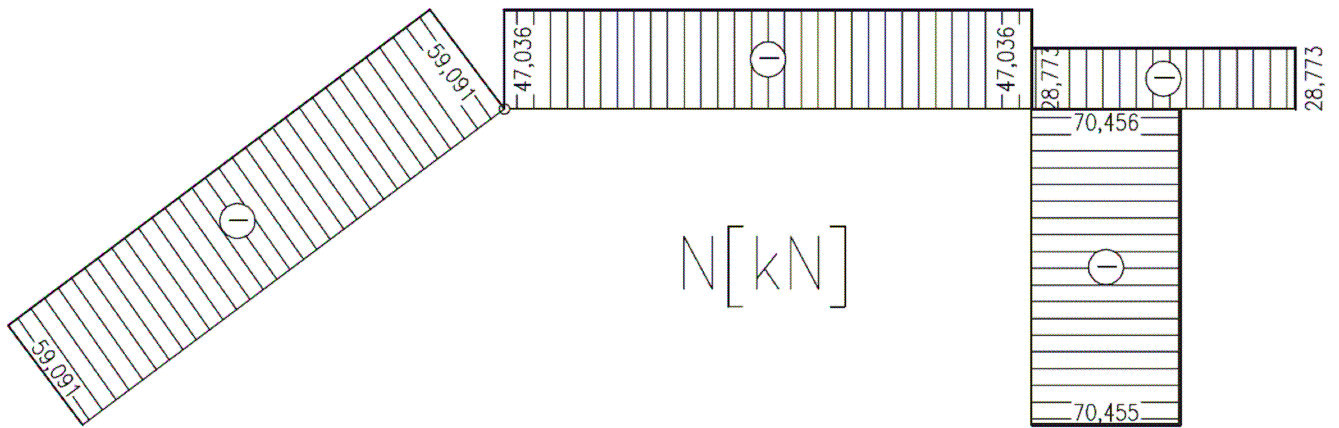
Interpretacja wektora sił przywęzłowych prezentuje się następująco:

$-N_{ik}$
$-T_{ik}$
M_{ik}
N_{ki}
T_{ki}
M_{ki}

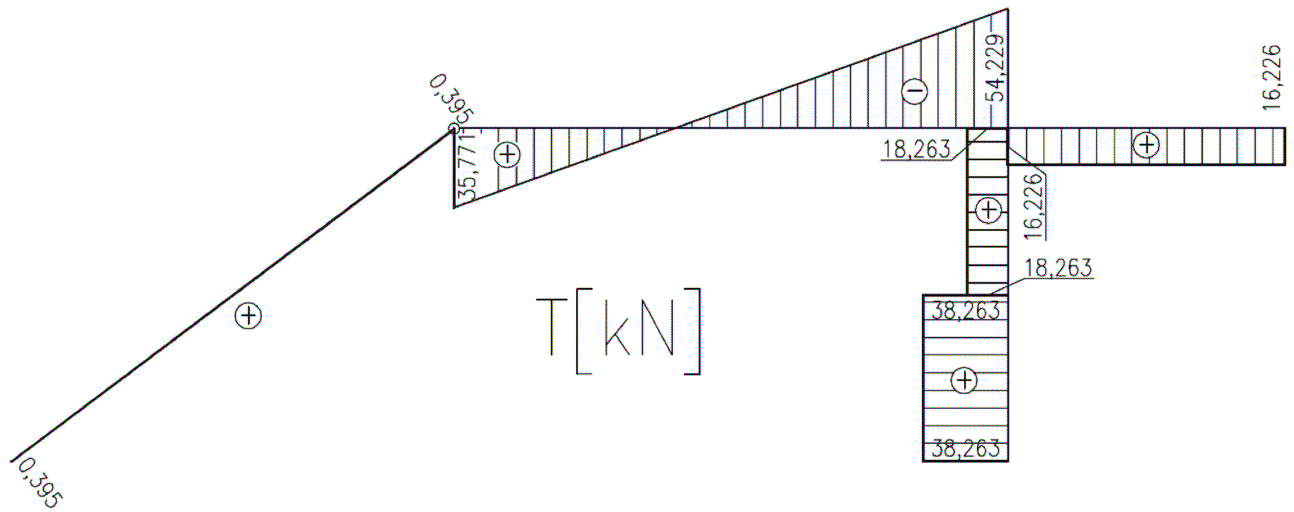
Na podstawie wektorów sił przywęzłowych uzyskano wykresy sił wewnętrznych



Wykres momentów zginających

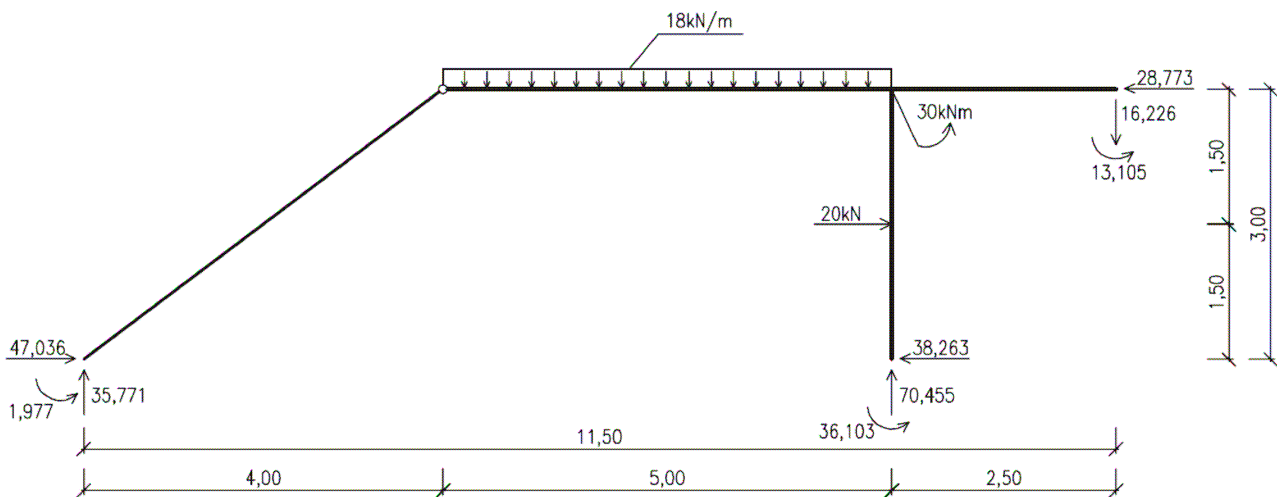


Wykres sił normalnych



Wykres sił tnących

Kontrola statyczna

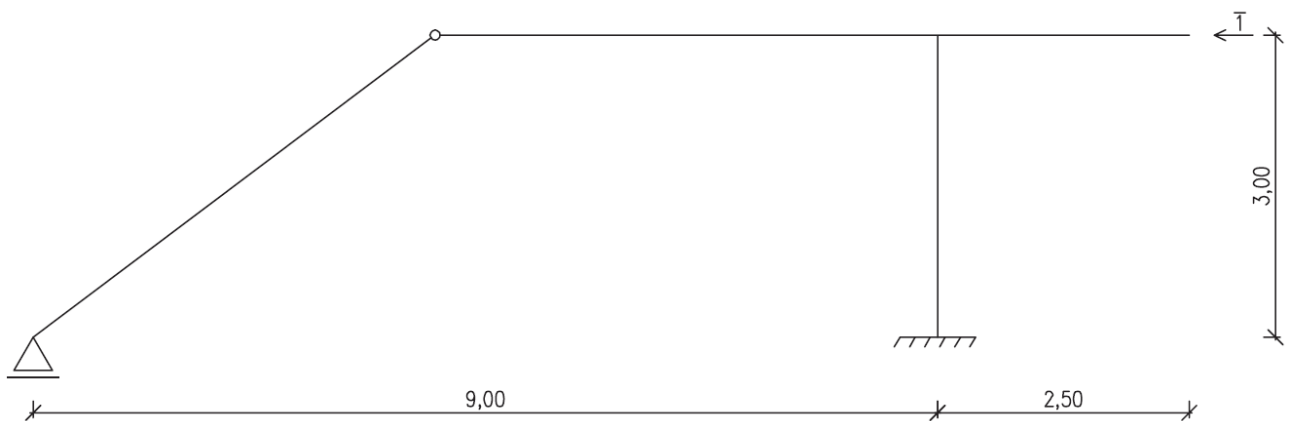


$$\sum Y = 35,771 + 70,455 - 16,226 - (18 \cdot 5) = 0,000$$

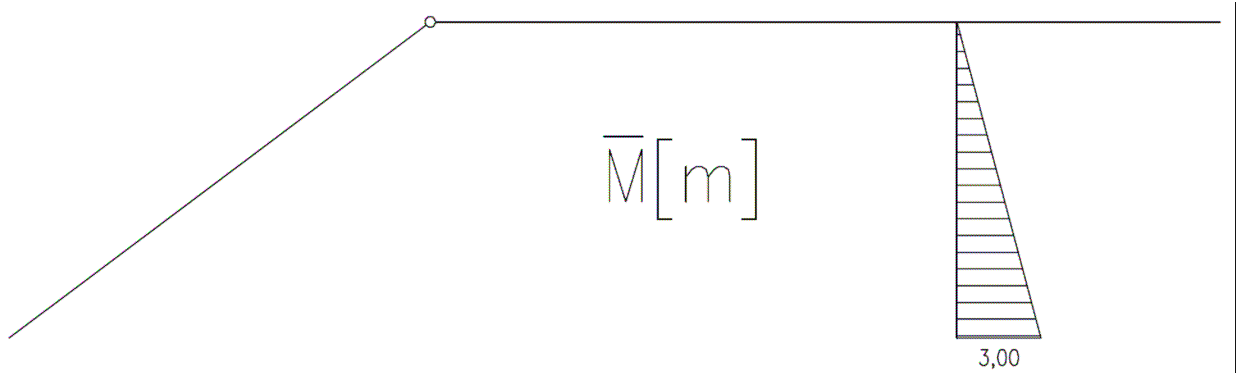
$$\sum X = 47,036 + 20 - 38,263 - 28,773 = 0,000$$

$$\sum M_2 = (-47,036 \cdot 3 - 1,977 + 35,771 \cdot 4) + (18 \cdot 5 \cdot 0,5 \cdot 5) - 30 - (20 \cdot 1,5) + (38,263 \cdot 3 - 70,455 \cdot 5 - 36,103) + (16,226 \cdot 7,50 - 13,105) = 0,000$$

Kontrola kinematyczna



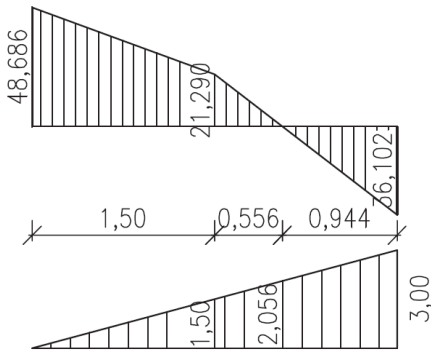
Układ podstawowy kontroli kinematycznej, dowolny układ statycznie wyznaczalny, geometrycznie niezmienny



Wykres momentów zginających od obciążenia jednostkowego

$$\bar{i} \cdot H_D = \sum \int \frac{M^n \cdot \bar{M}^0}{EI} dx$$

Całkowane fragmenty wykresu momentów zginających:



Wykonując całkowanie metodą Wereszczagina-Mohra otrzymano:

$$\begin{aligned} \bar{i} \cdot H_D &= \frac{1,5}{6} \cdot (2 \cdot 21,29 \cdot 1,5 + 48,686 \cdot 1,5) + \frac{0,556}{6} \cdot (2 \cdot 21,29 \cdot 1,5 + 21,29 \cdot 2,056) + \frac{0,944}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot (-36,102) + 2,056 \cdot (-36,102)) \\ &= \frac{-1,55887}{20090} = -0,00007759m \end{aligned}$$

Kontrola statyczna i kinematyczna wykazuje poprawność wykonanych obliczeń