POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH
ZAKŁAD MACHANIKI BUDOWLI

ĆWICZENIE PROJEKTOWE NR 2

DYNAMIKA RAM – WERSJA KOMPUTEROWA

Z PRZEDMIOTU

MECHANIKA KONSTRUKCJI

Wykonał: Kamil Sobczyński
WBiIŚ; SUM; 2-KBI
I rok; semestr II
Prowadzący: mgr inż. A. Kaczor

POZNAŃ 2010

ĆWICZENIE PROJEKTOWE Z PRZEDMIOTU MACHANIKA KONSTRUKCJI

Zawartość opracowania.

I. Strona tytułowa

II. Karta projektowa/konsultacyjna

III. Opis techniczny

1. Podstawa opracowania
2. Podstawowe założenia obliczeń

IV. Obliczenia

1. Dynamika ram - wersja komputerowa

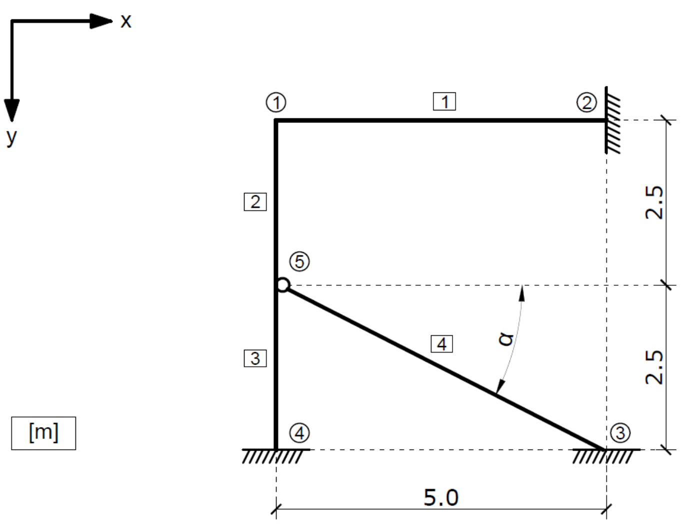
III. Opis techniczny

1. Podstawa opracowania

a) Ćwiczenia projektowe z przedmiotu „Mechanika konstrukcji",
b) J. Rakowski, „Mechanika budowli" WPP, Poznań 2007,
c) http://www.ikb.poznan.pl/anita.kaczor/materialy.htm
d) http://www.ikb.poznan.pl/przemyslaw.litewka/przykproj.html

2. Podstawowe założenia obliczeń

a) Projekt nr 2 – „Dynamika ram – wersja komputerowa"



Dane:

- kąt nachylenia pręta nr 4: $\alpha=26.565^{\circ}$,
- sztywność ramy $EJ \neq const$,
- przekrój pręta rygli (pręt nr 1 i 4) IPE300, $h = 0.30m$,
- przekrój pręta słupów (pręt nr 2 i 3) IPE240, $h = 0.24m$,
- współczynnik sprężystości podłużnej: $E = 205GPa$.

Szukane:

- obliczyć częstości drgań własnych,
- narysować pierwsze trzy postacie drgań własnych.

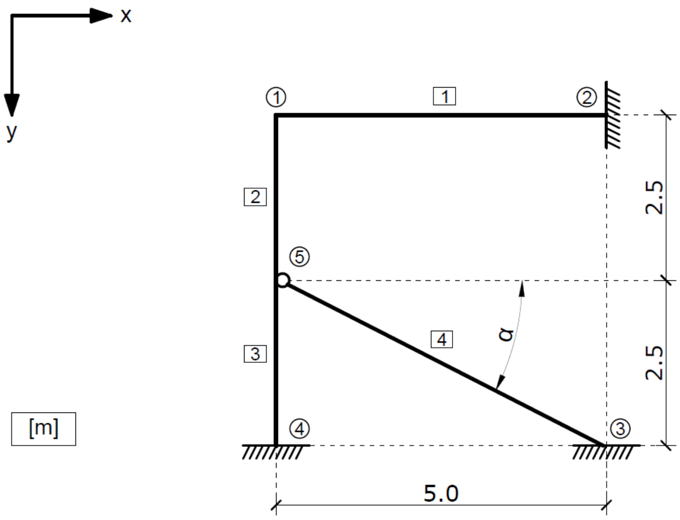
Założenie:

- przyjęto, że 1 pręt = 1 element,

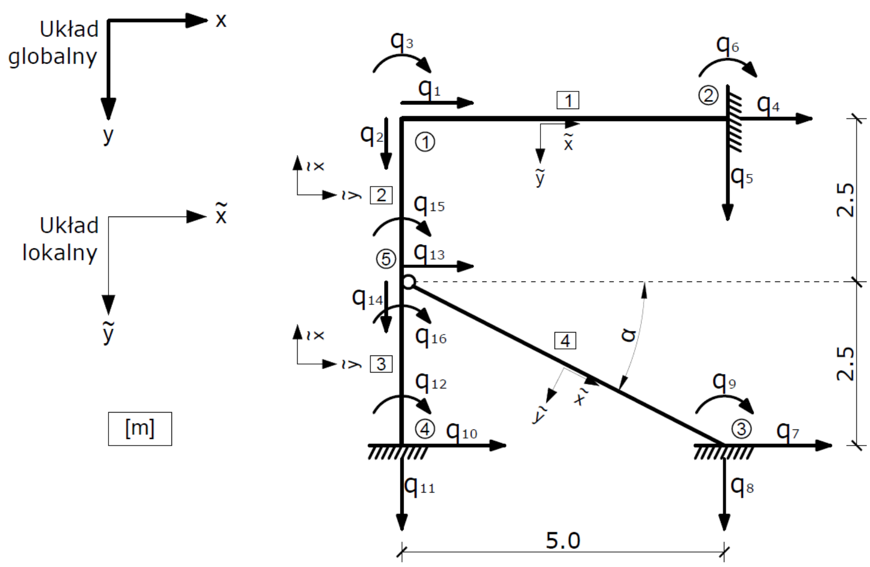
IV. Obliczenia

1. Dynamika ram – wersja komputerowa

Schemat konstrukcji:



Przemieszczenia w układzie globalnym i lokalnym:



Przyjęto do obliczeń, że ramę tworzą pręty stalowe:

- rygiel (pręt 1 i 4): IPE300, $J = 9800 cm^4$, $A = 69.0 cm^2$, $\mu = 54.2 kg/m$,
- słup (pręt 2 i 3): IPE240, $J = 4250 cm^4$, $A = 46.1 cm^2$, $\mu = 36.2 kg/m$,
- sztywność prętów: (1i4) $EJ = 20090000\, N \cdot m^2$, (2i3) $EJ = 8712500\, N \cdot m^2$,
  (1i4) $EA = 1414500000\, N$, (2i3) $EA = 945050000\, N$.

Przeprowadzono redukcję statyczną:

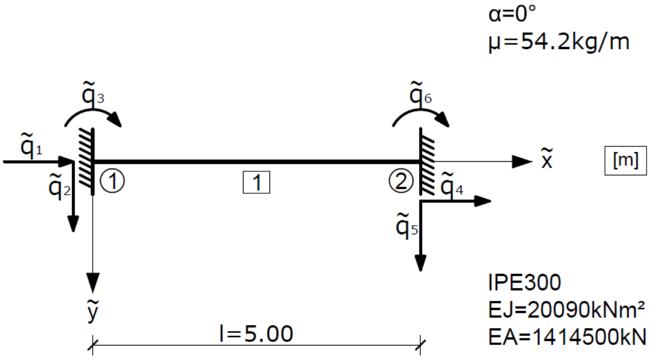
- pręt nr 4 – przegub na lewym końcu.

Tabela powiązań:

	1	2	3	4	5	6	układ L
pręt 1	1	2	3	4	5	6	układ G
pręt 2	13	14	15	1	2	3	układ G
pręt 3	10	11	12	13	14	15	układ G
pręt 4	13	14	15	7	8	9	układ G

MACIERZE SZTYWNOŚCI UKŁADU

Pręt nr 1 (obustronnie utwierdzony):



Macierz sztywności w układzie globalnym:

$$
K_1 = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
\hline
 & \mathbf{282900000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-282900000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{1929000} & \mathbf{4822000} & \mathbf{0} & \mathbf{-1929000} & \mathbf{4822000} & 2 \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{4822000} & \mathbf{16072000} & \mathbf{0} & \mathbf{-4822000} & \mathbf{8036000} & 3 \\
 & \mathbf{-282900000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{282900000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{-1929000} & \mathbf{-4822000} & \mathbf{0} & \mathbf{1929000} & \mathbf{-4822000} & 5 \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{4822000} & \mathbf{8036000} & \mathbf{0} & \mathbf{-4822000} & \mathbf{16072000} & 6
\end{array}
$$

Macierz transformacji jest macierzą jednostkową i zachodzi $\mathbf{K_1}=\mathbf{\tilde{K}_1}$. Układ lokalny pokrywa się z układem globalnym.

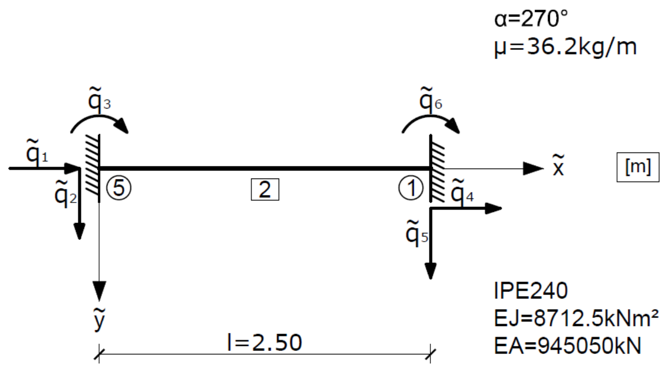
$$\mathbf{K}_{(e)} = \tilde{\mathbf{K}}_{(e)} \Leftrightarrow \mathbf{K}_{(e)} = \mathbf{T}^T \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{(e)} \cdot \mathbf{T} \ \wedge \ \mathbf{T}^T = \mathbf{T} = \mathbf{I}$$

$$C = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

$$T = \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Pręt nr 2 (obustronnie utwierdzony):



Macierz sztywności w układzie lokalnym:

$$
K_2=\begin{array}{cccccc|c}
13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
378020000 & 0 & 0 & -378020000 & 0 & 0 & 13\\
0 & 6691000 & 8364000 & 0 & -6691000 & 8364000 & 14\\
0 & 8364000 & 13940000 & 0 & -8364000 & 6970000 & 15\\
-378020000 & 0 & 0 & 378020000 & 0 & 0 & 1\\
0 & -6691000 & -8364000 & 0 & 6691000 & -8364000 & 2\\
0 & 8364000 & 6970000 & 0 & -8364000 & 13940000 & 3
\end{array}
$$

Transformacja do układu globalnego: $\mathbf{K}_{(e)} = \mathbf{T}^T \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_{(e)} \cdot \mathbf{T}$

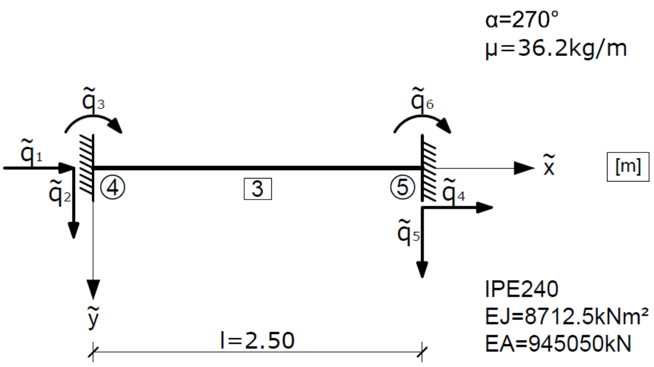
$$
T=\left|\begin{array}{ccc:ccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
$$

$$
T_T=\left|\begin{array}{ccc:ccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
$$

Macierz sztywności elementu 2 po transformacji:

$$
\mathbf{K_2}=\begin{array}{cccccc|c}
13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
\mathbf{6691000} & \mathbf{0} & \mathbf{8364000} & \mathbf{-6691000} & \mathbf{0} & \mathbf{8364000} & 13\\
\mathbf{0} & \mathbf{378020000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-378020000} & \mathbf{0} & 14\\
\mathbf{8364000} & \mathbf{0} & \mathbf{13940000} & \mathbf{-8364000} & \mathbf{0} & \mathbf{6970000} & 15\\
\mathbf{-6691000} & \mathbf{0} & \mathbf{-8364000} & \mathbf{6691000} & \mathbf{0} & \mathbf{-8364000} & 1\\
\mathbf{0} & \mathbf{-378020000} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{378020000} & \mathbf{0} & 2\\
\mathbf{8364000} & \mathbf{0} & \mathbf{6970000} & \mathbf{-8364000} & \mathbf{0} & \mathbf{13940000} & 3
\end{array}
$$

Pręt nr 3 (obustronnie utwierdzony):



Macierz sztywności w układzie lokalnym:

$$K_3=\begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} & \\ \left|\begin{array}{ccc:ccc} 378020000 & 0 & 0 & -378020000 & 0 & 0 \\ 0 & 6691000 & 8364000 & 0 & -6691000 & 8364000 \\ 0 & 8364000 & 13940000 & 0 & -8364000 & 6970000 \\ \hdashline -378020000 & 0 & 0 & 378020000 & 0 & 0 \\ 0 & -6691000 & -8364000 & 0 & 6691000 & -8364000 \\ 0 & 8364000 & 6970000 & 0 & -8364000 & 13940000 \end{array}\right| & \begin{array}{l} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array} \end{array}$$

Transformacja do układu globalnego: $\mathbf{K}_{(e)} = \mathbf{T}^T \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{(e)} \cdot \mathbf{T}$

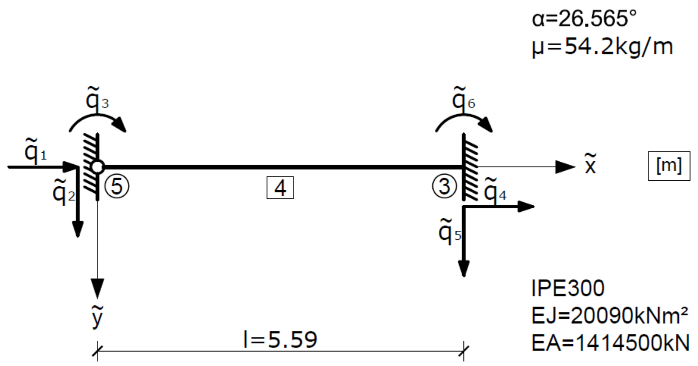
$$T=\left|\begin{array}{ccc:ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$T_T=\left|\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Macierz sztywności elementu 3 po transformacji:

$$\mathbf{K_3}=\begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} & \\ \left|\begin{array}{ccc:ccc} 6691000 & 0 & 8364000 & -6691000 & 0 & 8364000 \\ 0 & 378020000 & 0 & 0 & -378020000 & 0 \\ 8364000 & 0 & 13940000 & -8364000 & 0 & 6970000 \\ \hdashline -6691000 & 0 & -8364000 & 6691000 & 0 & -8364000 \\ 0 & -378020000 & 0 & 0 & 378020000 & 0 \\ 8364000 & 0 & 6970000 & -8364000 & 0 & 13940000 \end{array}\right| & \begin{array}{l} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array} \end{array}$$

Pręt nr 4 (z przegubem na lewym końcu):



Macierz sztywności w układzie lokalnym:

$$
K_4=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 13 & 14 & 15 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc:ccc}
253041000 & 0 & 0 & -253041000 & 0 & 0 \\
0 & 345000 & 0 & 0 & -345000 & 1929000 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
-253041000 & 0 & 0 & 253041000 & 0 & 0 \\
0 & -345000 & 0 & 0 & 345000 & -1929000 \\
0 & 1929000 & 0 & 0 & -1929000 & 10782000
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
$$

Transformacja do układu globalnego: $\mathbf{K}_{(e)} = \mathbf{T}^T \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{(e)} \cdot \mathbf{T}$

$$
T=\left|\begin{array}{ccc:ccc}
0,9 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0,4 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & 0,9 & 0,4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0,4 & 0,9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
$$

$$
T_T=\left|\begin{array}{ccc:ccc}
0,9 & -0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0,4 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & 0,9 & -0,4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
$$

Macierz sztywności elementu 4 po transformacji:

$$
\mathbf{K_4}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 13 & 14 & 15 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc:ccc}
\mathbf{202502000} & \mathbf{101078000} & \mathbf{0} & \mathbf{-202502000} & \mathbf{-101078000} & \mathbf{-863000} \\
\mathbf{101078000} & \mathbf{50884000} & \mathbf{0} & \mathbf{-101078000} & \mathbf{-50884000} & \mathbf{1725000} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hdashline
\mathbf{-202502000} & \mathbf{-101078000} & \mathbf{0} & \mathbf{202502000} & \mathbf{101078000} & \mathbf{863000} \\
\mathbf{-101078000} & \mathbf{-50884000} & \mathbf{0} & \mathbf{101078000} & \mathbf{50884000} & \mathbf{-1725000} \\
\mathbf{-863000} & \mathbf{1725000} & \mathbf{0} & \mathbf{863} & \mathbf{-1725} & \mathbf{10782000}
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
$$

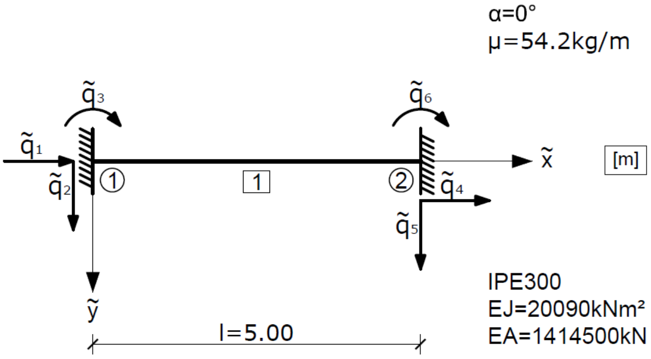
Macierz sztywności układu [K]x10^3 układu po agregacji:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	282900 6691	0 0	0 -8364	-282900	0	0							-6691	0	-8364	0	1
2	0 0	1929 378020	4822 0	0	-1929	4822							0	-378020	0	0	2
3	0 -8364	4822 0	16072 13940	0	-4822	8036							8364	0	6970	0	3
4	-282900	0	0	282900	0	0										0	4
5	0	-1929	-4822	0	1929	-4822										0	5
6	0	4822	8036	0	-4822	16072										0	6
7							202502	101078	863				-202502	-101078	0	0	7
8							101078	50884	-1725				-101078	-50884	0	0	8
9							863	-1725	10782				-863	1725	0	0	9
10										6691	0	8364	-6691	0	8364	0	10
11										0	378020	0	0	-378020	0	0	11
12										8364	0	13940	-8364	0	6970	0	12
13	-6691	0	8364				-202502	-101078	-863	-6691	0	-8364	6691 6691 202502	0 0 101078	8364 -8364 0	0	13
14	0	-378020	0				-101078	-50884	1725	0	-378020	0	0 0 101078	378020 378020 50884	0 0 0	0	14
15	-8364	0	6970				0	0	0	8364	0	6970	8364 -8364 0	0 0 0	13940 13940 0	0	15
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	289591	0	-8364										-6691	0	-8364		1
2	0	379949	4822										0	-378020	0		2
3	-8364	4822	30012										8364	0	6970		3
4																	4
5																	5
6																	6
7																	7
8																	8
9																	9
10																	10
11																	11
12																	12
13	-6691	0	8364										215885	101078	0		13
14	0	-378020	0										101078	806924	0		14
15	-8364	0	6970										0	0	27880		15
16																	16
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

MACIERZE MAS UKŁADU

Pręt nr 1 (obustronnie utwierdzony):



Macierz mas w układzie globalnym:

$$
\mathbf{M_1}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc:ccc}
90{,}3 & 0 & 0 & 45{,}2 & 0 & 0 \\
0 & 100{,}7 & 71{,}0 & 0 & 34{,}8 & -41{,}9 \\
0 & 71{,}0 & 64{,}5 & 0 & 41{,}9 & -48{,}4 \\
\hdashline
45{,}2 & 0 & 0 & 90{,}3 & 0 & 0 \\
0 & 34{,}8 & 41{,}9 & 0 & 100{,}7 & -71{,}0 \\
0 & -41{,}9 & -48{,}4 & 0 & -71{,}0 & 64{,}5
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

Macierz transformacji jest macierzą jednostkową i zachodzi $\mathbf{M_1}=\widetilde{\mathbf{M}}_1$. Układ lokalny pokrywa się z układem globalnym.

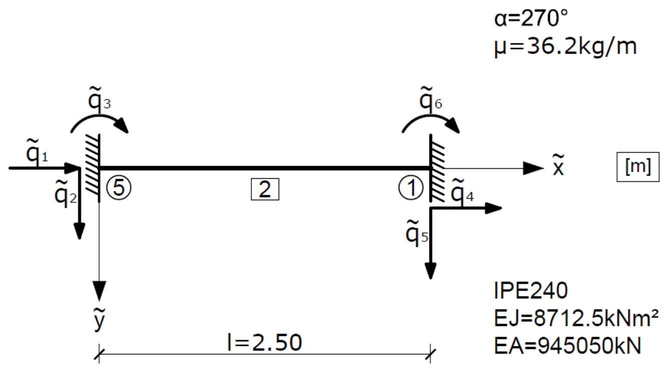
$$
\mathbf{M}_{(e)}=\widetilde{\mathbf{M}}_{(e)} \Leftrightarrow \mathbf{M}_{(e)}=\mathbf{T}^T\cdot\widetilde{\mathbf{M}}_{(e)}\cdot\mathbf{T} \ \wedge \ \mathbf{T}^T=\mathbf{T}=\mathbf{I}
$$

$$
C=\left|\begin{array}{ccc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|
$$

$$
T=\left|\begin{array}{cc} C & 0 \\ 0 & C \end{array}\right|
$$

$$
T=\left|\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
$$

Pręt nr 2 (obustronnie utwierdzony):



Macierz mas w układzie lokalnym:

$$
\mathrm{M}_2=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc|ccc}
30,2 & 0 & 0 & 15,1 & 0 & 0 \\
0 & 33,6 & 11,9 & 0 & 11,6 & -7,0 \\
0 & 11,9 & 5,4 & 0 & 7,0 & -4,0 \\
\hline
15,1 & 0 & 0 & 30,2 & 0 & 0 \\
0 & 11,6 & 7,0 & 0 & 33,6 & -11,9 \\
0 & -7,0 & -4,0 & 0 & -11,9 & 5,4
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
$$

Transformacja do układu globalnego: $\mathbf{M}_{(e)} = \mathbf{T}^T \cdot \tilde{\mathbf{M}}_{(e)} \cdot \mathbf{T}$

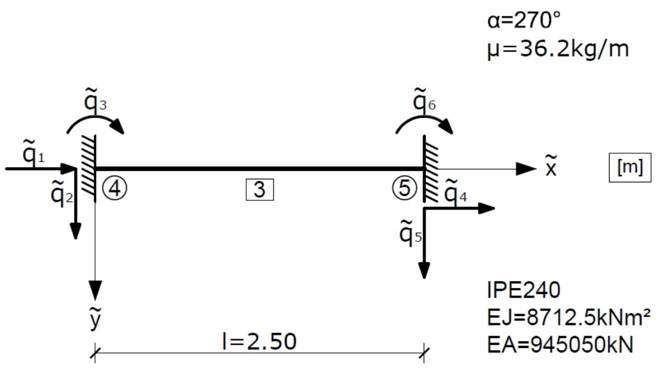
$$
\mathrm{T}=\left|\begin{array}{ccc|ccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
$$

$$
\mathrm{T}_\mathrm{T}=\left|\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
$$

Macierz mas elementu 2 po transformacji:

$$
\mathbf{M_2}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc|ccc}
\mathbf{33,6} & \mathbf{0} & \mathbf{11,9} & \mathbf{11,6} & \mathbf{0} & \mathbf{-7,0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{30,2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{15,1} & \mathbf{0} \\
\mathbf{11,9} & \mathbf{0} & \mathbf{5,4} & \mathbf{7,0} & \mathbf{0} & \mathbf{-4,0} \\
\hline
\mathbf{11,6} & \mathbf{0} & \mathbf{7,0} & \mathbf{33,6} & \mathbf{0} & \mathbf{-11,9} \\
\mathbf{0} & \mathbf{15,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{30,2} & \mathbf{0} \\
\mathbf{-7,0} & \mathbf{0} & \mathbf{-4,0} & \mathbf{-11,9} & \mathbf{0} & \mathbf{5,4}
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
$$

Pręt nr 3 (obustronnie utwierdzony):



Macierz mas w układzie lokalnym:

$$
M_3=\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} & \\
\left|\begin{array}{ccc:ccc}
30{,}2 & 0 & 0 & 15{,}1 & 0 & 0 \\
0 & 33{,}6 & 11{,}9 & 0 & 11{,}6 & -7{,}0 \\
0 & 11{,}9 & 5{,}4 & 0 & 7{,}0 & -4{,}0 \\
\hdashline
15{,}1 & 0 & 0 & 30{,}2 & 0 & 0 \\
0 & 11{,}6 & 7{,}0 & 0 & 33{,}6 & -11{,}9 \\
0 & -7{,}0 & -4{,}0 & 0 & -11{,}9 & 5{,}4
\end{array}\right| &
\begin{array}{c} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array}
\end{array}
$$

Transformacja do układu globalnego: $\mathbf{M}_{(e)} = \mathbf{T}^T \cdot \tilde{\mathbf{M}}_{(e)} \cdot \mathbf{T}$

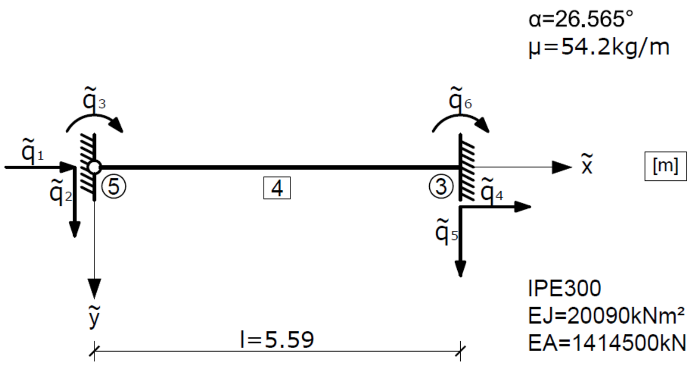
$$
T=\left|\begin{array}{ccc:ccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
$$

$$
T_T=\left|\begin{array}{ccc:ccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
$$

Macierz mas elementu 3 po transformacji:

$$
\mathbf{M_3}=\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} & \\
\left|\begin{array}{ccc:ccc}
33{,}6 & 0 & 11{,}9 & 11{,}6 & 0 & -7{,}0 \\
0 & 30{,}2 & 0 & 0 & 15{,}1 & 0 \\
11{,}9 & 0 & 5{,}4 & 7{,}0 & 0 & -4{,}0 \\
\hdashline
11{,}6 & 0 & 7{,}0 & 33{,}6 & 0 & -11{,}9 \\
0 & 15{,}1 & 0 & 0 & 30{,}2 & 0 \\
-7{,}0 & 0 & -4{,}0 & -11{,}9 & 0 & 5{,}4
\end{array}\right| &
\begin{array}{c} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array}
\end{array}
$$

Pręt nr 4 (z przegubem na lewym końcu):



Macierz mas w układzie lokalnym:

$$M_4=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} 13 & 14 & 15 & 7 & 8 & 9 \end{array}\\ \left|\begin{array}{ccc|ccc} 101,0 & 0 & 0 & 50,5 & 0 & 0 \\ 0 & 71,4 & 0 & 0 & 42,2 & -66,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 50,5 & 0 & 0 & 101,0 & 0 & 0 \\ 0 & 42,2 & 0 & 0 & 147,2 & -145,2 \\ 0 & -66,5 & 0 & 0 & -145,2 & 180,3 \end{array}\right|\end{array}\begin{array}{c} \\ 13\\14\\15\\7\\8\\9\end{array}$$

Transformacja do układu globalnego: $\mathbf{M}_{(e)} = \mathbf{T}^T \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_{(e)} \cdot \mathbf{T}$

$$T=\left|\begin{array}{ccc|ccc} 0,9 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$T^T=\left|\begin{array}{ccc|ccc} 0,9 & -0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,9 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Macierz mas elementu 4 po transformacji:

$$\mathbf{M_4}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} 13 & 14 & 15 & 7 & 8 & 9 \end{array}\\ \left|\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{95,1} & \mathbf{11,8} & \mathbf{0} & \mathbf{48,8} & \mathbf{3,3} & \mathbf{29,8} \\ \mathbf{11,8} & \mathbf{77,3} & \mathbf{0} & \mathbf{3,3} & \mathbf{43,9} & \mathbf{-59,5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{48,8} & \mathbf{3,3} & \mathbf{0} & \mathbf{110,2} & \mathbf{-18,5} & \mathbf{64,9} \\ \mathbf{3,3} & \mathbf{43,9} & \mathbf{0} & \mathbf{-18,5} & \mathbf{137,9} & \mathbf{-129,8} \\ \mathbf{29,8} & \mathbf{-59,5} & \mathbf{0} & \mathbf{64,9} & \mathbf{-129,8} & \mathbf{180,3} \end{array}\right|\end{array}\begin{array}{c} \\ 13\\14\\15\\7\\8\\9\end{array}$$

Macierz mas układu [M] układu po agregacji:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	90,3	0	0	45,2	0	0							11,6	0	7,0	0	1
	33,6	0	-11,9														
2	0	100,7	71,0	0	34,8	-41,9							0	15,1	0	0	2
	0	30,2	0														
3	0	71,0	64,5	0	41,9	-48,4							-7,0	0	-4,0	0	3
	-11,9	0	5,4														
4	45,2	0	0	90,3	0	0										0	4
5	0	34,8	41,9	0	100,7	-71,0										0	5
6	0	-41,9	-48,4	0	-71,0	64,5										0	6
7							110,2	-18,5	64,9				48,8	3,3	0	0	7
8							-18,5	137,9	-129,8				3,3	43,9	0	0	8
9							64,9	-129,8	180,3				29,8	-59,5	0	0	9
10										33,6	0	11,9	11,6	0	-7,0	0	10
11										0	30,2	0	0	15,1	0	0	11
12										11,9	0	5,4	7,0	0	-4,0	0	12
													33,6	0	11,9		
13	11,6	0	-7,0				48,8	3,3	29,8	11,6	0	7,0	33,6	0	-11,9	0	13
													95,1	11,8	0		
													0	30,2	0		
14	0	15,1	0				3,3	43,9	-59,5	0	15,1	0	0	30,2	0	0	14
													11,8	77,3	0		
													11,9	0	5,4		
15	7,0	0	-4,0				0	0	0	-7,0	0	-4,0	-11,9	0	5,4	0	15
													0	0	0		
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	123,9	0	-11,9										11,6	0	7,0		1
2	0	130,8	71,0										0	15,1	0		2
3	-11,9	71,0	69,9										-7,0	0	-4,0		3
4																	4
5																	5
6																	6
7																	7
8																	8
9																	9
10																	10
11																	11
12																	12
13	11,6	0	-7,0										162,3	11,8	0		13
14	0	15,1	0										11,8	137,7	0		14
15	7,0	0	-4,0										0	0	10,8		15
16																	16
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

Macierz sztywności układu [K]:

Po uwzględnieniu warunków podparcia $q_{4\text{-}12}=0$ oraz redukcji momentów $M_{16}=0$, otrzymujemy macierz.

K=

	1	2	3	13	14	15	
	289591000	**0**	**-8364000**	**-6691000**	**0**	**-8364000**	1
	0	**379949000**	**4822000**	**0**	**-378020000**	**0**	2
	-8364000	**4822000**	**30012000**	**8364000**	**0**	**6970000**	3
	-6691000	**0**	**8364000**	**215885000**	**101078000**	**0**	13
	0	**-378020000**	**0**	**101078000**	**806924000**	**0**	14
	-8364000	**0**	**6970000**	**0**	**0**	**27880000**	15

Macierz mas układu [M]:

Po uwzględnieniu warunków podparcia $q_{4\text{-}12}=0$ oraz redukcji momentów $M_{16}=0$, otrzymujemy macierz.

M=

	1	2	3	13	14	15	
	123,9	**0**	**-11,9**	**11,6**	**0**	**7,0**	1
	0	**130,8**	**71,0**	**0**	**15,1**	**0**	2
	-11,9	**71,0**	**69,9**	**-7,0**	**0**	**-4,0**	3
	11,6	**0**	**-7,0**	**162,3**	**11,8**	**0**	13
	0	**15,1**	**0**	**11,8**	**137,7**	**0**	14
	7,0	**0**	**-4,0**	**0**	**0**	**10,8**	15

Równanie równowagi dynamicznej układu (drgania własne):

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{q}=\mathbf{q_0}\cdot\sin(\omega\cdot t) \qquad (1)$$

$$(\mathbf{K}-\lambda\cdot\mathbf{M})\cdot\mathbf{q_0}=\mathbf{0} \qquad (2)$$

$$\lambda=\omega^2 \qquad (3)$$

Podstawiając macierze **K** i **M** do równania (2) wyznaczamy wartości własne λ oraz wektory własne $\mathbf{q_0}$. Rozwiązaniem równania jest 6 wartości własnych λ i 6 wektorów własnych $\mathbf{q_0}$. Obliczenia wykonano w programie UPW.

Częstości kołowe drgań własnych na podstawie wzoru (3).

Wartości własne i częstości kołowe drgań własnych:

	1	2	3	4	5	6
λ [rad^2/s^2]	325853,0	1203040,0	1608550,0	2313290,0	3458520,0	13238000,0
ω [rad/s]	**570,8**	**1096,8**	**1268,3**	1520,9	1859,7	3638,4

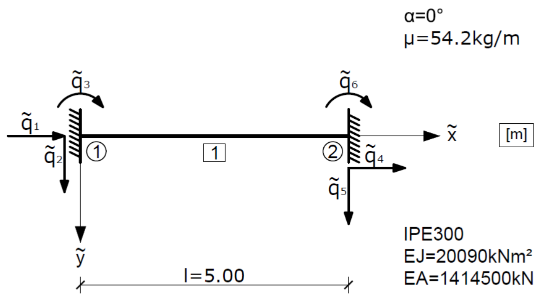
Wektory własne dla 3 pierwszych częstości kołowych drgań własnych w układzie globalnym:

	q_1		q_2		q_3
1	0,001891	*1*	0,036215	*1*	-0,307975
2	-0,175904	*2*	-0,296130	*2*	-0,436356
3	-1,042510	*3*	0,589191	*3*	0,333035
4	0	*4*	0	*4*	0
5	0	*5*	0	*5*	0
6	0	*6*	0	*6*	0
7	0	*7*	0	*7*	0
8	0	*8*	0	*8*	0
9	0	*9*	0	*9*	0
10	0	*10*	0	*10*	0
11	0	*11*	0	*11*	0
12	0	*12*	0	*12*	0
13	0,130896	*13*	0,762276	*13*	-0,181243
14	-0,105095	*14*	-0,286232	*14*	-0,274450
15	0,354883	*15*	-0,425473	*15*	-1,000000

Transformacja do układu lokalnego: $\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}_i$

1 CZĘSTOŚĆ KOŁOWA DRGAŃ WŁASNYCH:

Pręt nr 1 (obustronnie utwierdzony):

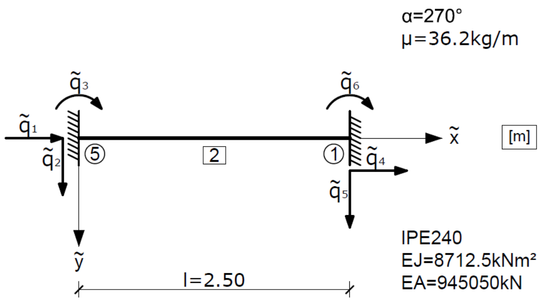


$$C = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

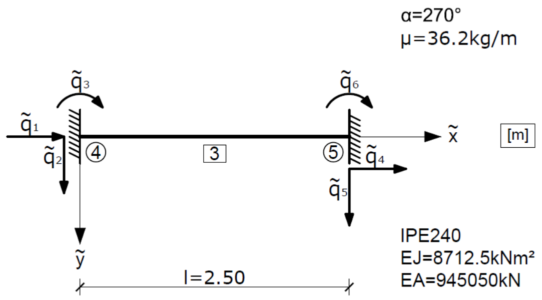
$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad q_1 = \begin{vmatrix} 0{,}001891 \\ -0{,}175904 \\ -1{,}042510 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad 1 = \begin{vmatrix} \mathbf{0{,}002} \\ \mathbf{-0{,}176} \\ \mathbf{-1{,}043} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathit{1} \\ \mathit{2} \\ \mathit{3} \\ \mathit{4} \\ \mathit{5} \\ \mathit{6} \end{matrix}$$

Pręt nr 2 (obustronnie utwierdzony):



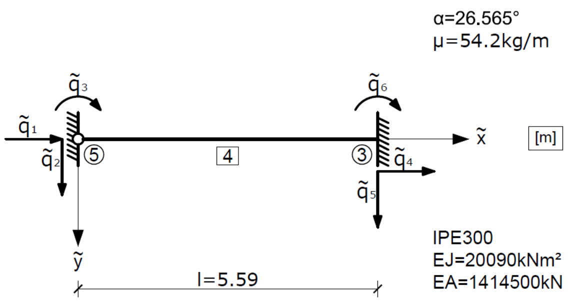
	0	-1	0	0	0	0		0,130896		**0,105**	*13*
	1	0	0	0	0	0		-0,105095		**0,131**	*14*
	0	0	1	0	0	0		0,354883		**0,355**	*15*
T=	0	0	0	0	-1	0	q2=	0,001891	2=	**0,176**	*1*
	0	0	0	1	0	0		-0,175904		**0,002**	*2*
	0	0	0	0	0	1		-1,042510		**-1,043**	*3*

Pręt nr 3 (obustronnie utwierdzony):



	0	-1	0	0	0	0		0		**0**	*10*
	1	0	0	0	0	0		0		**0**	*11*
	0	0	1	0	0	0		0		**0**	*12*
T=	0	0	0	0	-1	0	q3=	0,130896	3=	**0,105**	*13*
	0	0	0	1	0	0		-0,105095		**0,131**	*14*
	0	0	0	0	0	1		0,354883		**0,355**	*15*

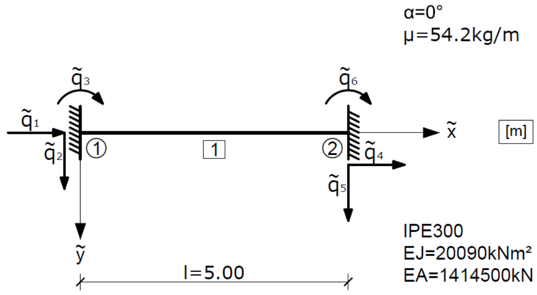
Pręt nr 4 (z przegubem na lewym końcu):



	0,9	0,4	0	0	0	0		0,130896		**0,070**	*13*
	-0,4	0,9	0	0	0	0		-0,105095		**-0,153**	*14*
	0	0	1	0	0	0		0,354883		**0,355**	*15*
T=	0	0	0	0,9	0,4	0	q4=	0	4=	**0**	*7*
	0	0	0	-0,4	0,9	0		0		**0**	*8*
	0	0	0	0	0	1		0		**0**	*9*

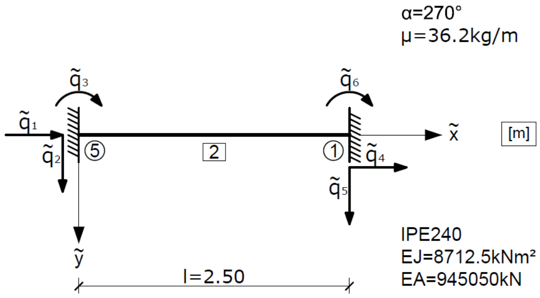
2 CZĘSTOŚĆ KOŁOWA DRGAŃ WŁASNYCH:

Pręt nr 1 (obustronnie utwierdzony):



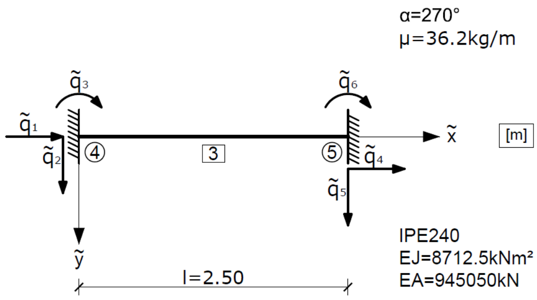
$$T=\left|\begin{array}{ccc:ccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ \hdashline 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right| \quad q_1=\left|\begin{array}{c} 0{,}036215\\ -0{,}296130\\ 0{,}589191\\ 0\\ 0\\ 0 \end{array}\right| \quad {}_1=\left|\begin{array}{c} \mathbf{0{,}036}\\ \mathbf{-0{,}296}\\ \mathbf{0{,}589}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0} \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathit{1}\\ \mathit{2}\\ \mathit{3}\\ \mathit{4}\\ \mathit{5}\\ \mathit{6} \end{array}$$

Pręt nr 2 (obustronnie utwierdzony):



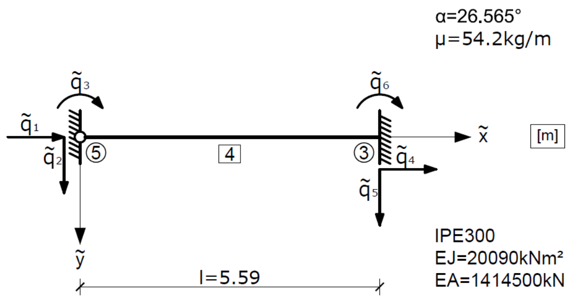
$$T=\left|\begin{array}{ccc:ccc} 0&-1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ \hdashline 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right| \quad q_2=\left|\begin{array}{c} 0{,}036215\\ -0{,}296130\\ 0{,}589191\\ 0{,}001891\\ -0{,}175904\\ -1{,}042510 \end{array}\right| \quad {}_2=\left|\begin{array}{c} \mathbf{0{,}296}\\ \mathbf{0{,}036}\\ \mathbf{0{,}589}\\ \mathbf{0{,}176}\\ \mathbf{0{,}002}\\ \mathbf{-1{,}043} \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathit{13}\\ \mathit{14}\\ \mathit{15}\\ \mathit{1}\\ \mathit{2}\\ \mathit{3} \end{array}$$

Pręt nr 3 (obustronnie utwierdzony):



$$T=\left|\begin{array}{ccc:ccc} 0&-1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ \hdashline 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right| \quad q_3=\left|\begin{array}{c} 0\\ 0\\ 0\\ 0{,}762276\\ -0{,}286232\\ -0{,}425473 \end{array}\right| \quad {}_3=\left|\begin{array}{c} \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0{,}286}\\ \mathbf{0{,}762}\\ \mathbf{-0{,}425} \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathit{10}\\ \mathit{11}\\ \mathit{12}\\ \mathit{13}\\ \mathit{14}\\ \mathit{15} \end{array}$$

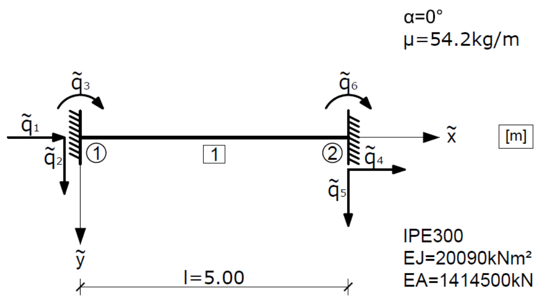
Pręt nr 4 (z przegubem na lewym końcu):



	0,9	0,4	0	0	0	0		0,762276		**0,554**	*13*
	-0,4	0,9	0	0	0	0		-0,286232		**-0,597**	*14*
	0	0	1	0	0	0		-0,425473		**-0,425**	*15*
T=	0	0	0	0,9	0,4	0	q4=	0	4=	**0**	*7*
	0	0	0	-0,4	0,9	0		0		**0**	*8*
	0	0	0	0	0	1		0		**0**	*9*

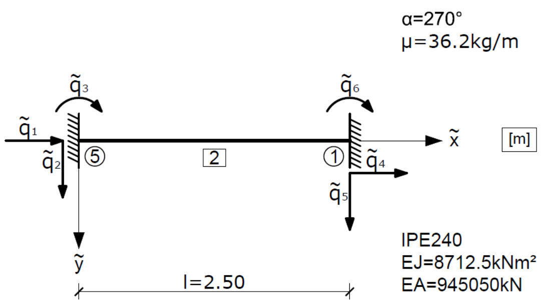
3 CZĘSTOŚĆ KOŁOWA DRGAŃ WŁASNYCH:

Pręt nr 1 (obustronnie utwierdzony):



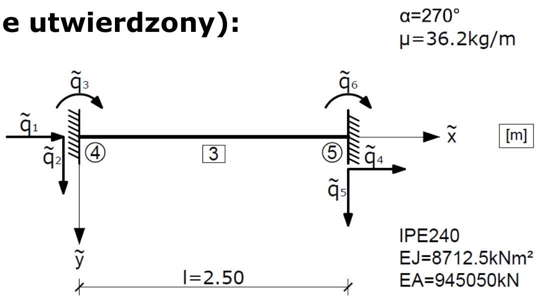
	1	0	0	0	0	0		-0,307975		**-0,308**	*1*
	0	1	0	0	0	0		-0,436356		**-0,436**	*2*
	0	0	1	0	0	0		0,333035		**0,333**	*3*
T=	0	0	0	1	0	0	q1=	0	1=	**0**	*4*
	0	0	0	0	1	0		0		**0**	*5*
	0	0	0	0	0	1		0		**0**	*6*

Pręt nr 2 (obustronnie utwierdzony):



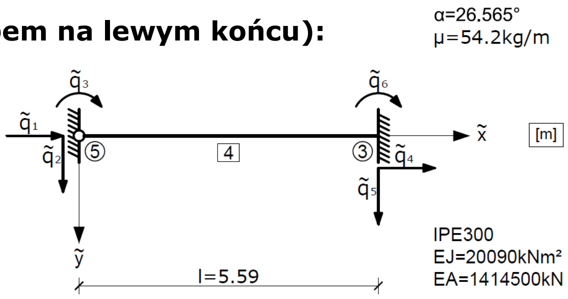
	0	-1	0	0	0	0		-0,181243		**0,274**	*13*
	1	0	0	0	0	0		-0,274450		**-0,181**	*14*
	0	0	1	0	0	0		-1,000000		**-1,000**	*15*
T=	0	0	0	0	-1	0	q2=	-0,307975	2=	**0,436**	*1*
	0	0	0	1	0	0		-0,436356		**-0,308**	*2*
	0	0	0	0	0	1		0,333035		**0,333**	*3*

Pręt nr 3 (obustronnie utwierdzony):



$$T=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad q_3=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ -0{,}181243\\ -0{,}274450\\ -1{,}000000 \end{bmatrix}\quad 3=\begin{bmatrix} \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0{,}274}\\ \mathbf{-0{,}181}\\ \mathbf{-1{,}000} \end{bmatrix}\begin{matrix} 10\\ 11\\ 12\\ 13\\ 14\\ 15 \end{matrix}$$

Pręt nr 4 (z przegubem na lewym końcu):



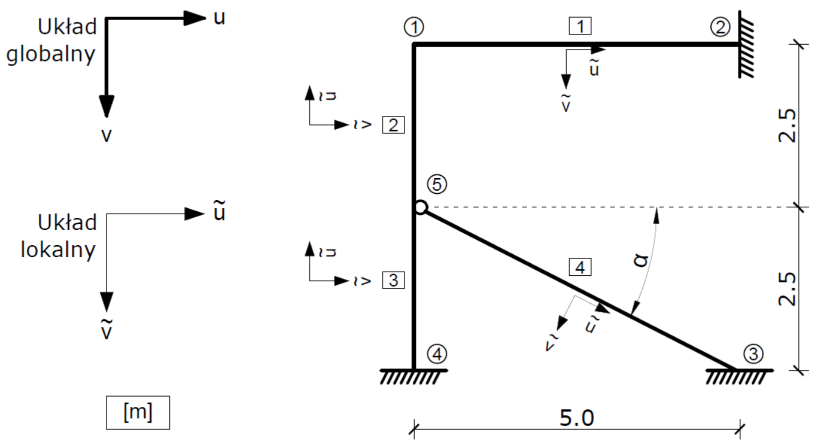
$$T=\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -0{,}4 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0{,}4 & 0{,}9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad q_4=\begin{bmatrix} -0{,}181243\\ -0{,}274450\\ -1{,}000000\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}\quad 4=\begin{bmatrix} \mathbf{-0{,}285}\\ \mathbf{-0{,}164}\\ \mathbf{-1{,}000}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{matrix} 13\\ 14\\ 15\\ 7\\ 8\\ 9 \end{matrix}$$

Postacie drgań własnych

Przemieszczenia punktów na długości elementów (prętów) w oparciu o przemieszczenia węzłowe i funkcje kształtu:

$$\tilde{u}(\tilde{x})=\tilde{q}_1\cdot N_1(\tilde{x})+\tilde{q}_4\cdot N_4(\tilde{x})$$

$$\tilde{v}(\tilde{x})=\tilde{q}_2\cdot N_2(\tilde{x})+\tilde{q}_3\cdot N_3(\tilde{x})+\tilde{q}_5\cdot N_5(\tilde{x})+\tilde{q}_6\cdot N_6(\tilde{x})$$



1 POSTAĆ DRGAŃ WŁASNYCH:

Pręt nr 1, L=5.0m (obustronnie utwierdzony):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0,001891**	**-0,175904**
1,25	0,75	0,844	0,703	0,250	0,156	-0,234	**0,001418**	**-0,881434**
2,5	0,5	0,5	0,625	0,5	0,5	-0,625	**0,000946**	**-0,739521**
3,75	0,25	0,156	0,234	0,750	0,844	-0,703	**0,000473**	**-0,271823**
5	0	0	0	1	1	0	**0**	**0**

Pręt nr 2, L=2.5m (obustronnie utwierdzony):

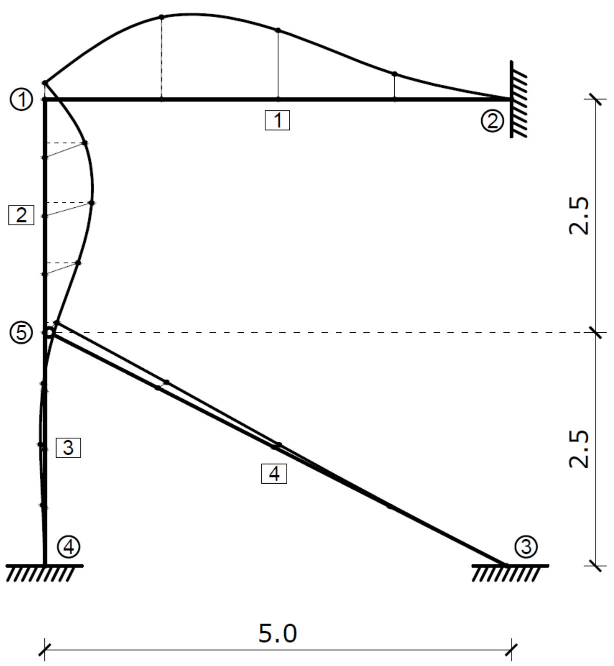
[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0,105095**	**0,130896**
0,63	0,75	0,844	0,352	0,25	0,156	-0,117	**0,122797**	**0,357672**
1,25	0,5	0,5	0,313	0,5	0,5	-0,313	**0,140500**	**0,503079**
1,88	0,25	0,156	0,117	0,75	0,844	-0,352	**0,158202**	**0,430143**
2,5	0	0	0	1	1	0	**0,175904**	**0,001891**

Pręt nr 3, L=2.5m (obustronnie utwierdzony):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0**	**0**
0,63	0,75	0,844	0,352	0,25	0,156	-0,117	**0,026274**	**-0,021135**
1,25	0,5	0,5	0,313	0,5	0,5	-0,313	**0,052548**	**-0,045453**
1,88	0,25	0,156	0,117	0,75	0,844	-0,352	**0,078821**	**-0,014320**
2,5	0	0	0	1	1	0	**0,105095**	**0,130896**

Pręt nr 4, L=5.59m (z przegubem na lewym końcu):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0,070077**	**-0,152538**
1,40	0,75	0,633	0	0,25	0,367	-0,655	**0,052558**	**-0,096528**
2,80	0,5	0,313	0	0,5	0,688	-1,048	**0,035039**	**-0,047668**
4,19	0,25	0,086	0	0,75	0,914	-0,917	**0,017519**	**-0,013109**
5,59	0	0	0	1	1	0	**0**	**0**



2 POSTAĆ DRGAŃ WŁASNYCH:

Pręt nr 1, L=5.0m (obustronnie utwierdzony):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0,036215**	**-0,296130**
1,25	0,75	0,844	0,703	0,250	0,156	-0,234	**0,027161**	**0,164415**
2,5	0,5	0,5	0,625	0,5	0,5	-0,625	**0,018108**	**0,220179**
3,75	0,25	0,156	0,234	0,750	0,844	-0,703	**0,009054**	**0,091821**
5	0	0	0	1	1	0	**0**	**0**

Pręt nr 2, L=2.5m (obustronnie utwierdzony):

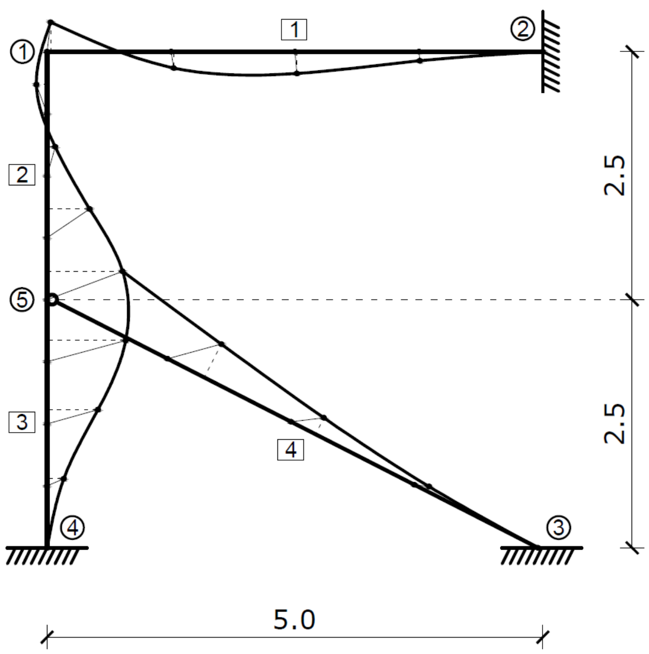
[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0,286232**	**0,762276**
0,63	0,75	0,844	0,352	0,25	0,156	-0,117	**0,288707**	**0,430203**
1,25	0,5	0,5	0,313	0,5	0,5	-0,313	**0,291181**	**0,082163**
1,88	0,25	0,156	0,117	0,75	0,844	-0,352	**0,293656**	**-0,107336**
2,5	0	0	0	1	1	0	**0,296130**	**0,036215**

Pręt nr 3, L=2.5m (obustronnie utwierdzony):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0**	**0**
0,63	0,75	0,844	0,352	0,25	0,156	-0,117	**0,071558**	**0,168966**
1,25	0,5	0,5	0,313	0,5	0,5	-0,313	**0,143116**	**0,514098**
1,88	0,25	0,156	0,117	0,75	0,844	-0,352	**0,214674**	**0,792751**
2,5	0	0	0	1	1	0	**0,286232**	**0,762276**

Pręt nr 4, L=5.59m (z przegubem na lewym końcu):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0,553794**	**-0,596913**
1,40	0,75	0,633	0	0,25	0,367	-0,655	**0,415346**	**-0,377734**
2,80	0,5	0,313	0	0,5	0,688	-1,048	**0,276897**	**-0,186535**
4,19	0,25	0,086	0	0,75	0,914	-0,917	**0,138449**	**-0,051297**
5,59	0	0	0	1	1	0	**0**	**0**



3 POSTAĆ DRGAŃ WŁASNYCH:

Pręt nr 1, L=5.0m (obustronnie utwierdzony):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**-0,307975**	**-0,436356**
1,25	0,75	0,844	0,703	0,250	0,156	-0,234	**-0,230981**	**-0,134010**
2,5	0,5	0,5	0,625	0,5	0,5	-0,625	**-0,153988**	**-0,010031**
3,75	0,25	0,156	0,234	0,750	0,844	-0,703	**-0,076994**	**0,009874**
5	0	0	0	1	1	0	**0**	**0**

Pręt nr 2, L=2.5m (obustronnie utwierdzony):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0,274450**	**-0,181243**
0,63	0,75	0,844	0,352	0,25	0,156	-0,117	**0,314927**	**-0,591635**
1,25	0,5	0,5	0,313	0,5	0,5	-0,313	**0,355403**	**-0,661182**
1,88	0,25	0,156	0,117	0,75	0,844	-0,352	**0,395880**	**-0,522443**
2,5	0	0	0	1	1	0	**0,436356**	**-0,307975**

Pręt nr 3, L=2.5m (obustronnie utwierdzony):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**0**	**0**
0,63	0,75	0,844	0,352	0,25	0,156	-0,117	**0,068613**	**0,088868**
1,25	0,5	0,5	0,313	0,5	0,5	-0,313	**0,137225**	**0,221879**
1,88	0,25	0,156	0,117	0,75	0,844	-0,352	**0,205838**	**0,198639**
2,5	0	0	0	1	1	0	**0,274450**	**-0,181243**

Pręt nr 4, L=5.59m (z przegubem na lewym końcu):

[m]	N1	N2	N3	N4	N5	N6	$\tilde{u}(\tilde{x})$ [m]	$\tilde{v}(\tilde{x})$ [m]
0	1	1	0	0	0	0	**-0,284846**	**-0,164421**
1,40	0,75	0,633	0	0,25	0,367	-0,655	**-0,213635**	**-0,104048**
2,80	0,5	0,313	0	0,5	0,688	-1,048	**-0,142423**	**-0,051382**
4,19	0,25	0,086	0	0,75	0,914	-0,917	**-0,071212**	**-0,014130**
5,59	0	0	0	1	1	0	**0**	**0**