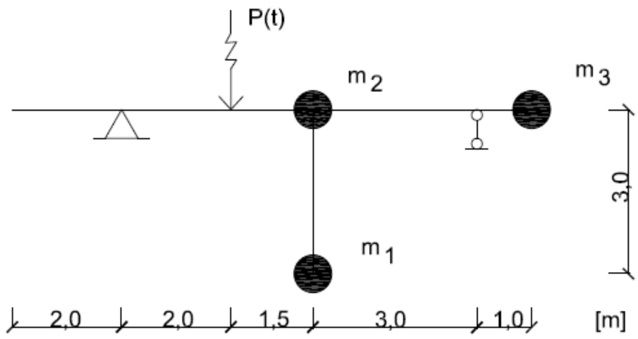
Dynamika w ujęciu klasycznym

Projekt wykonały:
Kinga Jezierska
Paulina Juszczak

Dla układu przedstawionego na schemacie poniżej wyznaczyć częstości kołowe drgań własnych, postacie drgań własnych, amplitudy przemieszczeń mas przy zadanym wymuszeniu siłą P(t), oraz wykonać sprawdzenie naprężeń normalnych (obciążenie dynamiczne i statyczne – ciężarem własnym).



Dane:

m_1=380kg

m_2=600kg

m_3=200kg

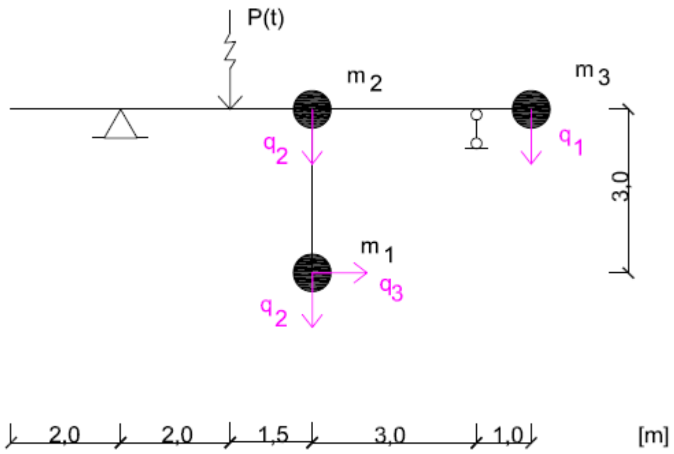
P= 35kN, p=18,3Hz

P(t)=Psin(pt)

Rama wykonana z dwuteownika 180:

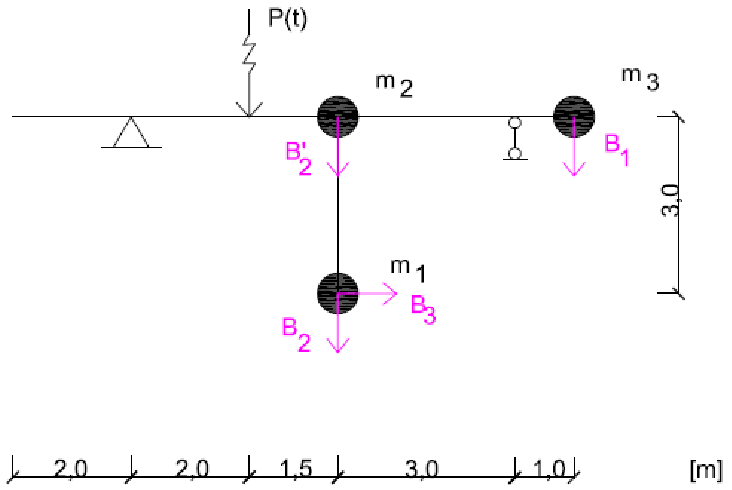
I=1450cm^4,   E=205GPa, W_x= 161cm^3

Określenie stopnia swobody dynamicznej:



SSD=3

Drgania własne:



Siły bezwładności działające na układ:

$B_1=-m_3\cdot\ddot{q}_1$
$B_2=-m_1\cdot\ddot{q}_2$
$B_2'=-m_2\cdot\ddot{q}_2$
$B_3=-m_1\cdot\ddot{q}_3$

Równania ruchu opisujące przemieszczenia mas przy drganiach swobodnych:

$$q_i = \delta_{i1}\cdot B_1 + \delta_{i2}\cdot(B_2 + B_2') + \delta_{i3}\cdot B_3 \qquad i = 1,2,3$$

gdzie: $q_i = A_i \sin\omega t$

$$\ddot{q}_i = -A_i\,\omega^2 \sin\omega t$$

$$\delta_{ik} = \sum \frac{M_i M_k}{EI} dx$$

Po podstawieniu i uproszczeniu otrzymujemy:

$$\begin{cases} A_1= \delta_{11}*m_3*A_1*\omega^2+ \delta_{12}*(m_1+m_2)*A_2*\omega^2+ \delta_{13}*m_1*A_3*\omega^2 \\ A_2= \delta_{21}*m_3*A_1*\omega^2+ \delta_{22}*(m_1+m_2)*A_2*\omega^2+ \delta_{23}*m_1*A_3*\omega^2 \\ A_3= \delta_{31}*m_3*A_1*\omega^2+ \delta_{32}*(m_1+m_2)*A_2*\omega^2+ \delta_{33}*m_1*A_3*\omega^2 \end{cases}$$

Przyjęto masę porównawczą: m_0=100 kg,
stąd: m_1= 3,8 m_0 m_2=6,0 m_0 m_3= 2,0 m_0

Podstawiono: $\lambda=\frac{m_0\omega^2}{EI}$

$\delta_{ik}' = \delta_{ik}*EI$

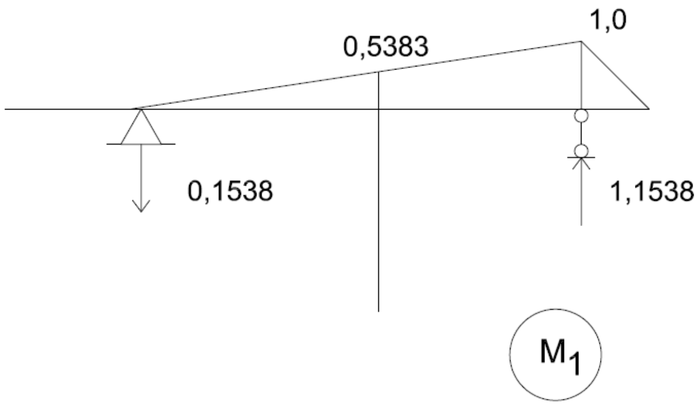
$$\begin{cases} A_1\,(1-\delta'_{11}{*}2\,\lambda) - A_2 * \delta'_{12}{*}9{,}8\,\lambda - A_3 * \delta'_{13}{*}3{,}8\,\lambda = 0 \\ -A_1 * \delta'_{21}{*}2\,\lambda + A_2(1-\delta'_{22}{*}9{,}8\,\lambda) - A_3 * \delta'_{23}{*}3{,}8\,\lambda = 0 \\ -A_1 * \delta'_{31}{*}2\,\lambda - A_2 * \delta'_{32}{*}9{,}8\,\lambda + A_3(1-\delta'_{33}{*}3{,}8\,\lambda) = 0 \end{cases}$$

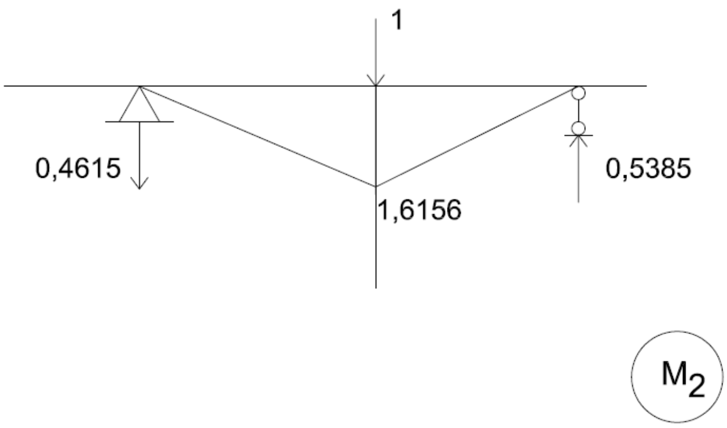
Układ równań jednorodnych ma rozwiązanie niezerowe, gdy wyznacznik główny układu jest równy zeru, stąd:

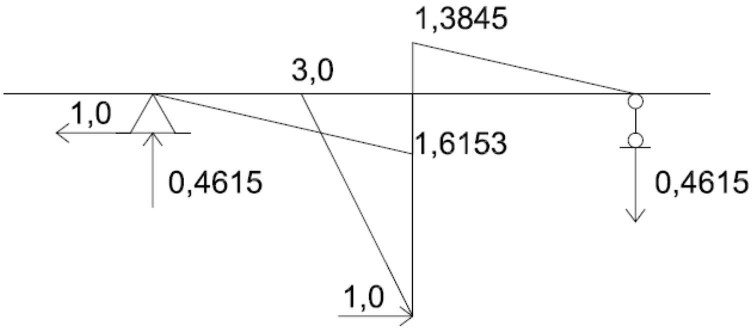
$$\det \begin{vmatrix} 1-\delta'_{11}{*}2\lambda & -\delta'_{12}{*}9.8\lambda & -\delta'_{13}{*}3{,}8\lambda \\ -\delta'_{12}{*}2\lambda & 1-\delta'_{22}{*}9.8\lambda & -\delta'_{23}{*}3{,}8\lambda \\ -\delta'_{31}{*}2\lambda & -\delta'_{32}{*}9.8\lambda & 1-\delta'_{33}{*}3{,}8\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Wyznaczenie współczynników δ_{ik}

Układ jest statycznie wyznaczalny. Rozkład momentów zginających od obciążenia siłami jednostkowymi po kierunkach q_i przedstawiają poniższe wykresy:







M_3

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}*3,5*0,5383*0,5383*\frac{2}{3}+\frac{1}{2}*1,0*1,0*\frac{2}{3}*1,0+\frac{1}{2}*0,5383*3 *\left(\frac{1}{3}*1,0+\frac{2}{3}*0,5383\right)+\frac{1}{2}*1,0*3*(\frac{2}{3}*1,0+\frac{1}{3}*0,5383)\right] = \frac{2,5}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI}\left[\frac{-1}{2}*3,5*0,5383*\frac{2}{3}*1,6156-\frac{1}{2}*3*1,6156*\left(\frac{1}{3}*1,0+\frac{2}{3}*0,05383\right)\right] = \frac{-2,6921}{EI}$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EI}\ [\left(-1,6153*3,5*\frac{1}{2}*0,5383*\frac{2}{3}+\frac{1}{2}*1,3845*3*\left(\frac{2}{3}*0,5383+\frac{1}{3}*1,0\right)\right] = \frac{0,4231}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}*1,6156*1,6156*3,5*\frac{2}{3}+\frac{1}{2}*1,6156*1,6156*3*\frac{2}{3}\right] = \frac{5,6554}{EI}$$

$$\delta_{23} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}*1,6156*1,6153*\frac{2}{3}*3,5-1,3845*1,6156*\frac{1}{2}*3*\frac{2}{3}\right] = \frac{0,8078}{EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}*3*3*\frac{2}{3}*3+\frac{1}{2}*1,3845*1,3845*\frac{2}{3}*3+1,6153*1,6153*\frac{2}{3}*3,5*\frac{1}{2}\right] = \frac{13,9609}{EI}$$

$$\det \begin{vmatrix} \text{1-2,5*2}\lambda & \text{2.6921*9,8}\lambda & \text{-0.4231*3,8}\lambda \\ \text{2,6921*2}\lambda & \text{1-5.6554*9,8}\lambda & \text{-0.8078*3,8}\lambda \\ \text{-0,4231*2}\lambda & \text{-0.8078*9,.8}\lambda & \text{1-13.9609*3,8}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Równanie charakterystyczne:

$1 - 113.47434\ \lambda + 3314.9261\ \lambda^2 - 6831.452\ \lambda^3 = 0$

Rozwiązania – wartości własne oraz wyznaczone na ich podstawie częstości kołowe drgań własnych:

$\lambda_3 = 0,4489742$
$\lambda_2 = 0,0198241$
$\lambda_1 = 0,0164465$

$\omega=\sqrt{\frac{\lambda EI}{m_0}}$,   EI=2972500 Nm^2

ω_1=22,1105 $\frac{rad}{s}$
ω_2=24,2749 $\frac{rad}{s}$
ω_3=115,5238 $\frac{rad}{s}$

Wektory własne i postacie drgań własnych:

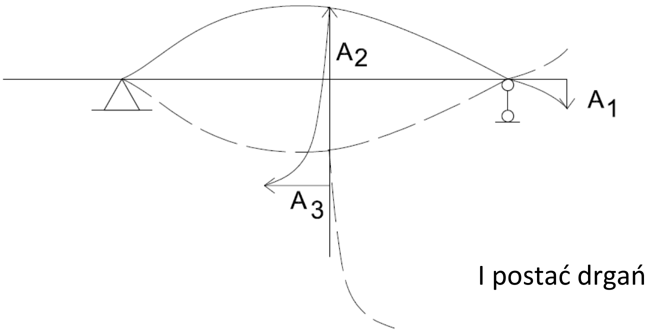
I postać drgań własnych:

λ_1 = 0.0164465 ω_1=22,1105$\frac{rad}{s}$

A1=1,0   A2= ? A3=?

$$\begin{cases} 1-2,5*2*\lambda_1+A_2*2,6921*9,8\ \lambda_1-A_3*0,4231*3,8*\ \lambda_1=0 \\ 2,6921*2*\ \lambda_1+A_2*(1-5,6554*9,8\ \lambda_1)-A_3*0,8078*3,8*\ \lambda_1=0 \end{cases}$$

A_2= - 2,2478
A_3= - 2,1869



I postać drgań własnych

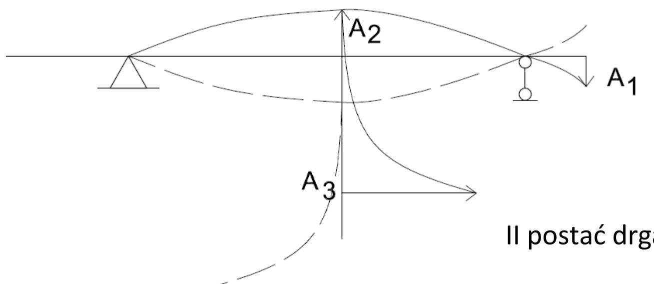
II postać drgań własnych:

λ_2 = 0.0198241 ω_2=24,2749 $\frac{rad}{s}$

A1=1,0   A2= ? A3=?

$$\begin{cases} 1-2,5*2*\lambda_2+A_2*2,6921*9,8\ \lambda_2-A_3*0,4231*3,8*\ \lambda_2=0 \\ 2,6921*2*\ \lambda_2+A_2*(1-5,6554*9,8\ \lambda_2)-A_3*0,8078*3,8*\ \lambda_2=0 \end{cases}$$

A_2= - 1,4706
A_3= 4,1389



II postać drgań własnych

III postać drgań własnych:

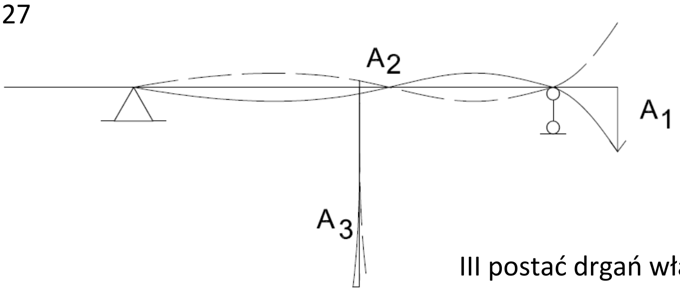
λ_3 =0.4489742 ω_3=115,5238 $\frac{rad}{s}$

A1=1,0 A2= ? A3=?

$$\begin{cases} 1-2,5*2*\lambda_3+A_2*2,6921*9,8\,\lambda_3-A_3*0,4231*3,8*\lambda_3=0 \\ 2,6921*2*\lambda_3+A_2*(1-5,6554*9,8\,\lambda_3)-A_3*0,8078*3,8*\lambda_3=0 \end{cases}$$

A_2= 0,1031

A_3= - 0,0327



III postać drgań własnych

Drgania wymuszone:

P=35kN=35000N

p=18,3 Hz=18,3*2π=113,0973 $\frac{rad}{s}$

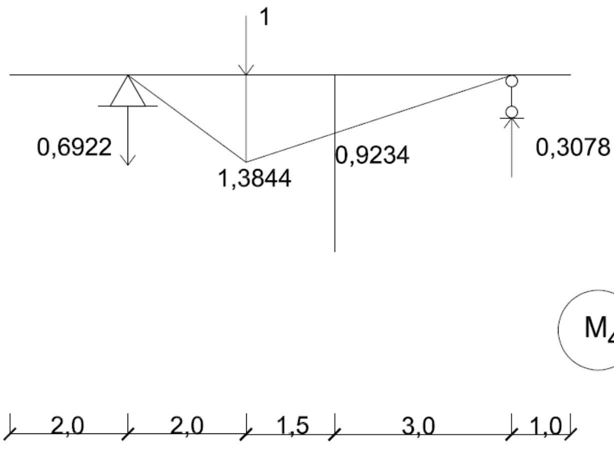
P(t)=P sin (pt)

EI= 2972500 Nm^2

Równania ruchu drgań wymuszonych

$q_i = \delta_{i1}*B_1+ \delta_{i2}*(B_2+B_2') + \delta_{i3}*B_3 + \delta_{i4}*P(t)$

Wyznaczenie współczynników δ_{i4}:



$$\delta_{14} = \frac{1}{EI}\Big[\frac{-1}{2}*0,3076*2*\frac{2}{3}*1,3844+\frac{1}{2}*0,3076*1,5*\left(-\frac{2}{3}*1,3844-\frac{1}{3}*0,9234\right)+\frac{1}{2}*0,5383*1,5*\left(-\frac{1}{3}*1,3844-\frac{2}{3}*0,9234\right)+\frac{1}{2}*0,9234*3*\left(-\frac{2}{3}*0,5383-\frac{1}{3}*1,0\right)\Big] = \frac{-1,9614}{\mathrm{EI}}$$

$$\delta_{24}=\frac{1}{EI}\left[\frac{-1}{2}*0{,}9230*2*\frac{2}{3}*1{,}3844+\frac{1}{2}*0{,}9230*1{,}5*\left(\frac{2}{3}*1{,}3844+\frac{1}{3}*0{,}9234\right)+\frac{1}{2}*1{,}6156*1{,}5*\left(\frac{1}{3}*1{,}3844+\frac{2}{3}*0{,}9234\right)+\frac{1}{2}*0{,}9234*3*\frac{2}{3}*1{,}6156\right]=\frac{4{,}5011}{\mathrm{EI}}$$

$$\delta_{34}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}*0{,}9230*2*\frac{2}{3}*1{,}3844+\frac{1}{2}*0{,}9230*1{,}5*\left(\frac{2}{3}*1{,}3844+\frac{1}{3}*0{,}9234\right)+\frac{1}{2}*1{,}6153*1{,}5*\left(\frac{1}{3}*1{,}3844+\frac{2}{3}*0{,}9234\right)-\frac{1}{2}*0{,}9234*3*\frac{2}{3}*1{,}3545\right]=\frac{1{,}7302}{\mathrm{EI}}$$

$$\begin{cases} A_1(1-\delta_{11}*m_3*p^2)-A_2*\delta_{12}*(m_1+m_2)*p^2-A_3*\delta_{13}*m_1*p^2=\delta_{14}*P \\ -A_1*\delta_{21}*m_3*p^2+A_2*\delta_{22}*(m_1+m_2)*p^2-A_3*\delta_{23}*m_1*p^2=\delta_{24}*P \\ -A_1*\delta_{31}*m_3*p^2-A_2*\delta_{32}*(m_1+m_2)*p^2-A_3(1-\delta_{33}*m_1*p^2)=\delta_{34}*P \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1{,}1516*A_1-(-11{,}3527)*A_2-0{,}6918*A_3=-0{,}0231 \\ -(-2{,}3169)*A_1+(-22{,}8491)*A_2-1{,}3209*A_3=0{,}0530 \\ -0{,}3641*A_1-3{,}4065*A_2+(-21{,}8286)*A_3=0{,}0204 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań ruchu – amplitudy przemieszczeń mas:

$A_1 = -\ 0{,}0561$ m
$A_2 = -\ 0{,}0035$ m
$A_3 = \ \ 0{,}0024$ m

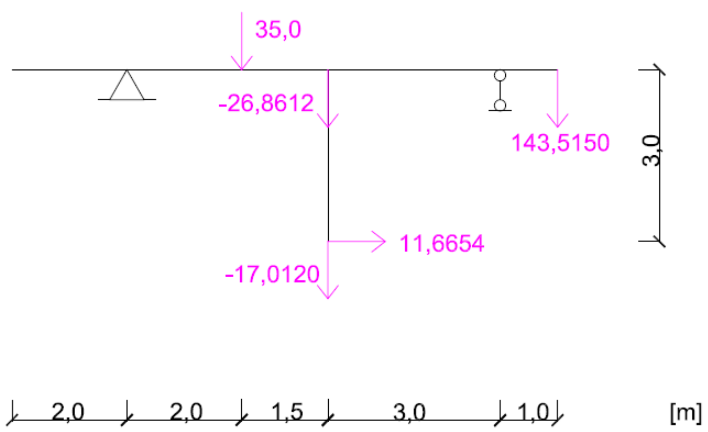
Maksymalne wartości sił bezwładności (dla sin(pt)=1,0):

$B_1=-[m_3*(-A_1*p^2*\sin(pt))] = -[\ 200*0{,}0561\ \ *113{,}0973^2*\sin(pt)] = -143515{,}0118$ N $= -143{,}5150$ kN

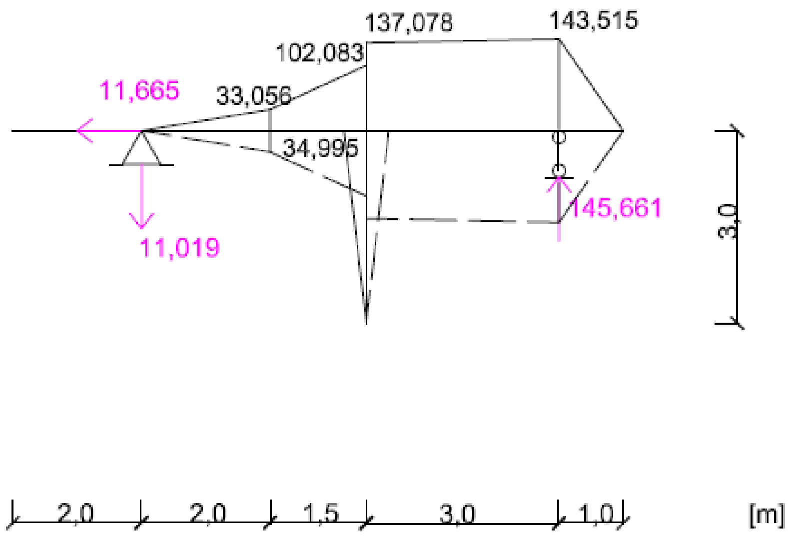
$B_2=-[m_1*(-A_2*p^2*\sin(pt))] = -[\ 380*\ 0{,}0035\ \ *113{,}0973^2*\sin(pt)] = -\ 17012{,}0290$ N $= -17{,}0120$ kN

$B_2'=-[m_2*(-A_2*p^2*\sin(pt))] = -[\ 600*\ 0{,}0035\ \ *113{,}0973^2*\sin(pt)] = -\ 26861{,}0985$ N $= -26{,}8612$ kN

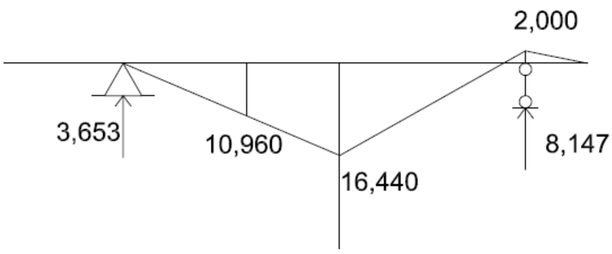
$B_3=-[m_1*(-A_3*p^2*\sin(pt))] = -[\ 380*\ (-0{,}0024)\ *113{,}0973^2*\sin(pt)] = 11665{,}3913$ N $= 11{,}6654$ kN



Obwiednia momentów dynamicznych [kNm]:



Moment statyczny [kNm]:



Sprawdzenie naprężeń normalnych w przekroju:

M_{max} = 1,2·M_{st} + 5·M_d = 1,2·200+5·14351,5 =71997,5 kNcm

$\frac{M_{max}}{W} = \frac{71997,5}{161} = 447,189 \frac{kN}{cm^2}$ = 4471,89 MPa > 215 MPa

Przekrój nie spełnia warunku wytrzymałościowego.